Základy úrokového počtu

Principy úrokového počtu

- koruna dnes má větší hodnotu než koruna získaná zítra
- může být ihned investována a přinášet výnos
- existuje časová hodnota peněz, základem je úročení (jednoduché, složené, smíšené)

Jednoduché úročení – úrok se nepřipisuje k základu a vybírá se odděleně, tj. výpočet úroků vychází ze stále stejného základu

Složené úročení - úrok se připisuje k základu a znovu se úročí, tj. počítají se „úroky z úroků“, připisování úroků je polhůtní a předlhůtní

Smíšené úročení – kombinace jednoduchého a složeného úročení, jednoduché úročení se týká neúplného úrokovacího období

Základem úročení je

	úroková míra a	**období za kterou se úroky připisují**
- p.a. (per annum)	roční úroková míra	roční připisování úroků
- p.s. (per semestre)	pololetní úroková míra = $\frac{1}{2} \times$ p.a.	půlroční připisování úroků
- p.q. (per quartale)	čtvrtletní úroková míra = $\frac{1}{4} \times$ p.a.	čtvrtletní připisování úroků
- p.m. (per mensem)	měsíční úroková míra = $\frac{1}{12} \times$ p.a.	měsíční připisování úroků
- p.d. (per diem)	denní úroková míra = $\frac{1}{365} \times$ p.a.	denní připisování úroků

*Pro výpočet úrokové doby se používají určité **standardy**. Odlišují se tím, kolik dní má (finanční) měsíc a kolik dní má (finanční) rok.*

- ***30E/360** (německý standard, obchodní či německá metoda)*

Každý měsíc má 30 dní, každý rok má 360 dní.

- ***ACT/360** (mezinárodní standard, francouzská metoda)*

Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby. Rok má 360 dní.

- ***ACT/365** (anglická metoda)*

Započítává se skutečný počet dnů úrokové doby, tj. skutečný počet dní v měsíci. Rok má 365 dní.

- ***30A/360** (americký standard)*

Standard je podobný standardu 30E/360. Liší se od standardu 30E/360 maximálně o jeden den. Pokud poslední den vkladu připadá na 31. den v měsíci a zároveň první den vkladu není 30. či 31. den v měsíci, pak se počítá i poslední den vkladu, tj. 31. den.

Ve vztazích pro úrokový počet je nutné rozlišovat, kdy je částka připsána na účet, rozlišujeme připisování:

Předlhůtní - částka je připsána na účet před lhůtou zúročení - na začátku období

Polhůtní - částka je připsána na účet po lhůtě zúročení - na konci období

Jednoduché úročení

Výpočet budoucí hodnoty (future value)
(jednorázového vkladu)

$$FV = \mathrm{PV} * (1 + \mathrm{i}\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}})$$

Střadatel předlhůtní
(pravidelně ukládaná stejná částka)

$$\mathrm{S}^{-} = \mathrm{m} + \frac{\mathrm{m}+1}{2}\mathrm{i}$$

Střadatel polhůtní

$$\mathrm{S}^{+} = \mathrm{m} + \frac{\mathrm{m}-1}{2}\mathrm{i}$$

$$K = H * \mathrm{S}$$

k   *počet dnů*
n   *počet dnů v daném období (rok 360)*
i   *úroková míra za úročené období*
m   *počet vkladů za období připsání úroku (p.a., p.s., p.m., p.q., p.d.)*
PV   *vložená částka- současná hodnota (present value)*
FV   *částka na konci období – budoucí hodnota (future value)*
H   *pravidelně ukládaná částka*
K   *výsledná naspořená částka*

Složené úročení

Výpočet budoucí hodnoty (future value)
(jednorázového vkladu)

$$FV = \mathrm{PV} * (1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{m*T}$$

T   *počet let*
m   *počet období za rok*
PV   *vložená částka v roce T=0*
FV   *konečná částka v roce T*
i   *roční úroková míra (efektivní)*

Efektivní úroková míra i_{ef} - taková roční úroková míra, která odpovídá nominální roční úrokové míře *i* při úročení m-krát ročně. Má stejný efekt jako daný systém úrokování za celé období.
Platí následující vztahy:

$$(1 + i_{ef}) = (1 + \frac{i}{m})^{m}$$

$$i_{ef} = (1 + \frac{i}{m})^{m} - 1$$

i_{ef} *efektivní roční úroková míra*
i   *roční úroková míra*
m   *počet období za rok*

Střadatel

Koeficient pro výpočet celkové naspořené budoucí hodnoty včetně úroků, kterou získáme pravidelným střádáním (spořením, ukládáním) částky.

Na začátku období ukládáme pravidelně částku H, za T let naspoříme částku K, přičemž *i* je roční úroková míra

$$S^{-} = q \times \frac{q^{T} - 1}{q - 1} \qquad \text{střadatel předlhůtní kde } q=(1+i)$$

$$K = H \times q \times \frac{q^{T} - 1}{q - 1} = H \times q \times \frac{q^{T} - 1}{q - 1} H \times (1+i) \times \frac{(1+i)^{T} - 1}{i}$$

Na konci období ukládáme pravidelně částku H, za T let naspoříme částku K, přičemž *i* je roční úroková míra

$$S^{+} = \frac{q^{T} - 1}{q - 1} \qquad \text{střadatel polhůtní}$$

$$K = H \times \frac{q^{T} - 1}{q - 1} = H \times \frac{(1+i)^{T} - 1}{i}$$

Zásobitel

Koeficient pro výpočet současné hodnoty budoucích pravidelných výběrů (zásobuji se) včetně připsaných úroků.

Jak velkou částku *K* musíme dnes uložit na knížku, jestliže chci každý rok vybírat částku *H*, přičemž *i* je roční úroková míra.

$$Z^{+} = \frac{q^{T} - 1}{q^{T} \times (q - 1)} = S^{+} \times \frac{1}{q^{T}} \qquad \text{zásobitel}$$

$$K = H \times \frac{q^{T} - 1}{q^{T} \times (q - 1)} = H \times \frac{(1+i)^{T} - 1}{(1+i)^{T} \times [(1+i) - 1]}$$

$$PV = H \times \frac{q^{T} - 1}{q^{T} \times (q - 1)} = H \times \frac{(1+i)^{T} - 1}{(1+i)^{T} \times [(1+i) - 1]}$$

Vztahy mezi střadatelem a zásobitelem:

$$\mathrm{FV} = \mathrm{PV} * (1 + \mathrm{i})^{T} \ \ odpovídá \ \ S = \mathrm{Z} * (1 + \mathrm{i})^{T} \ \ tedy \ Z = \frac{\mathrm{S}}{q^{T}}$$

Anuita

Koeficient pro výpočet pravidelných budoucích polhůtních plateb včetně úroku ze současné hodnoty (Splácení půjčky).

Jak velkou konstantní splátku ***s*** (anuitu) budu splácet na konci období, mám - li úvěr velikosti *U* při úrokové míře *i*, kde *T* je počet let splatnosti úvěru. Anuitní splátka je po celou dobu splácení konstantní a mění se poměr úmoru a úroku.

$$a = \frac{q^T \times (q-1)}{q^T - 1} = \frac{(1+i)^T \times [(1+i)-1]}{(1+i)^T - 1} = \frac{1}{Z^+}$$

a anuitní koeficient

$$\boldsymbol{s} = \mathrm{U} * \frac{\mathrm{q}^T * (\mathrm{q}-1)}{\mathrm{q}^T - 1} = U * \boldsymbol{a}$$

Perpetuita

Věčný výnos, neboli nekonečný pravidelný hotovostní tok pravidelných peněžních příjmů ve stejné výši. Současnou hodnotu perpetuity, která je rovna zásobiteli limitně jdoucímu do nekonečna, vypočteme jako:

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{\mathrm{i}}$$

$$PV = A * \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\mathrm{q}^T - 1}{\mathrm{q}^T * (\mathrm{q}-1)} \right) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{i}}$$

A *výše perpetuity (pravidelná platba) za jedno období*

i *roční úroková míra*

Pozn.: Ve všech příkladech uvedených níže počítejte se smíšeným úročením a německým standardem 30E/360 (rok má 360 dní a měsíc 30 dní).

1. Příklad (řešený)

Přepočet úrokové sazby bez změny úrokování:
Čtvrtletní úrok lze převést na roční, měsíční, pololetní bez změny úrokování neboli bez změny připisování úroků.

Úrok 1.5 % p.q./p.q. => 3 % p.s./p.q. => 6 % p.a./p.q. => 0.5 % p.m./p.q

Přepočet úrokové sazby se změnou úrokování (efektivní úrok):

1.5 % p.q./p.q ≠ 3 % p.s./p.s. správně $i = (1 + 0{,}015)^2 - 1 = 3{,}0225$ % p.s./p.s.

1.5 % p.q./p.q. ≠ 6 % p.a./p.a. správně $i = (1 + 0{,}015)^4 - 1 = 6{,}1364$ % p.a./p.a.

1.5 % p.q./p.q. ≠ 0.5 % p.m./p.m. správně $i = (1 + 0{,}015)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}4975$ % p.m./p.m.

- Vypočtěte jaká bude hodnota jednorázového vkladu 10 000 Kč za 7 let při úroku 6 % p.a./p.q. (6 % ročního úroku s čtvrtletním připisováním úroků)?

$$FV = 10\,000 * (\,1 + \frac{0{,}06}{4})^{4*7} = 10\,000 * (\,1 + 0{,}015)^{28} = 15\,172{,}2\ Kč$$

- Vypočtěte jaká bude hodnota jednorázového vkladu 10 000 Kč za 28 čtvrtletí při úroku 1,5 % p.q./p.q. (1,5 % čtvrtletního úroku s čtvrtletním připisováním úroků)?

$$FV = 10\,000 * (\,1 + 0{,}015)^{28} = 10\,000 * (\,1 + 0{,}061364)^{7} = 15\,172{,}2\ Kč$$

- Vypočtěte jaká bude hodnota jednorázového vkladu 10 000 Kč za 7 let při roční úrokové míře 6 % a úroky jsou připisovány a) ročně (6 % p.a.), b) pololetně (6 % p.a./p.s.) a c) čtvrtletně (6 % p.a./p.q.)

Výpočet budoucí hodnoty dle vztahu: $FV = \mathrm{PV} * (\,1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{m*T}$

a) $FV = \mathrm{PV} * (\,1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{m*T} = 10\,000 * (1 + 0{,}06)^{7} = 15\,036{,}3\ Kč$

b) $FV = \mathrm{PV} * (\,1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{m*T} = 10\,000 * (1 + \frac{0{,}06}{2})^{2*7} = 15\,125{,}9\ Kč$

c) $FV = \mathrm{PV} * (\,1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{m*T} = 10\,000 * (1 + \frac{0{,}06}{4})^{4*7} = 15\,172{,}3\ Kč$

2. Příklad

Kolik si vyberete po půl roce (180 dní), je-li úroková sazba 2 % p.a. (implicitně znamená p.a./p.a.) a počáteční vklad činil 150 000 Kč?

3. Příklad

Jak velkou částku si budete moci vybrat z účtu, pokud jste uložili 200 000 Kč při úrokové sazbě 2 % p.a. na 4 roky a 4 měsíce a úroky jsou připisovány a) ročně b) pololetně c) čtvrtletně.

4. Příklad

Kolik činí roční úroková míra s pololetním složeným úrokováním, pokud se za 6 let zúročí základ 100 000 Kč na splatnou částku 150 000 Kč?

5. Příklad

Otec ve své závěti stanovil, že 0,5 mil. Kč bude převedeno do zvláštního fondu, ze kterého každé ze tří dětí dostane při dosažení 18 let stejný podíl. Fond byl investován s úrokovou mírou 10 % a čtvrtletním úrokováním. V době smrti otce bylo stáří dětí 9,12 a 14 let. Jak velkou částku při dosažení 18 let dostane každé dítě?

6. Příklad

First National Bank používá nominální roční úrokovou míru 13 % s denním úrokováním, zatímco Second National Bank nabízí nominální roční úrokovou míru 13,5 % s půlročním úrokováním. Do které banky vložíte své peníze? Zdůvodněte výpočtem.

Příklady pro procvičení:

Příklad 1
Vklad 100 000 Kč je uložen na 10 let s roční úrokovou mírou 6 %. Jaká je splatná částka při ročním, půlročním, čtvrtletním a měsíčním složeném úrokování?

Řešení:
roční úročení: *179 084,80 Kč*
půlroční úročení: *180 611,10 Kč*
čtvrtletní úročení: *181 401,80 Kč*
měsíční úročení: *181 939,70 Kč*

Příklad 2
Jaká nominální roční úroková míra se čtvrtletním složeným úrokováním za 5 let zúročí základ 50 000 Kč na splatnou částku 70 000 Kč?

Řešení:
Nominální roční úroková sazba je 6,79 % p.a/p.q.

Příklad 3
Vypočtěte roční efektivní úrokovou míru vypočtenou pro nominální roční úrokovou sazbu 5 % s ročním, půlročním, čtvrtletním, měsíčním, týdenním a denním úrokování.

Řešení:
Půlroční i_{ef} *= 5,0625 % p.a./p.a.*
Čtvrtletní i_{ef} *= 5,0945 % p.a./p.a.*
Měsíční i_{ef} *= 5,1162 % p.a./p.a.*
Týdenní i_{ef} *= 5,1246 % p.a./p.a.*
Denní i_{ef} *= 5,1267 % p.a./p.a.*