

Úrokový počet – střadatel, zásobitel, anuita, perpetuita

Jednoduché úročení

Výpočet budoucí hodnoty (future value)

(jednorázového vkladu)

$$FV = PV * (1 + i \frac{k}{n})$$

Střadatel předlůtní

(pravidelně ukládaná stejná částka)

$$S^- = m + \frac{m + 1}{2} i$$

Střadatel polhůtní

$$S^+ = m + \frac{m - 1}{2} i$$

$$K = H * S$$

k	počet dnů
n	počet dnů v daném období (rok 360)
i	úroková míra za úročené období
m	počet vkladů za období připsání úroku (p.a., p.s., p.m., p.q., p.d.)
PV	vložená částka - současná hodnota (present value)
FV	částka na konci období - budoucí hodnota(future value)
H	pravidelně ukládaná částka
K	výsledná naspořená částka

Složené úročení

Výpočet budoucí hodnoty

(jednorázového vkladu)

$$FV = PV * (1 + \frac{i}{m})^{m*T}$$

T	počet let
m	počet období za rok
PV	vložená částka - současná hodnota (present value)
FV	konečná částka budoucí hodnota(future value)
i	roční úroková míra (efektivní)

Efektivní úroková míra i_{ef} - taková roční úroková míra, která odpovídá nominální roční úrokové míře i při úročení m -krát ročně. Má stejný efekt jako daný systém úrokování za celé období.

Platí následující vztahy:

$$(1 + i_{ef}) = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

i_{ef} efektivní roční úroková míra

i roční úroková míra

m počet období za rok

Střadatel

Koeficient pro výpočet celkové naspořené budoucí hodnoty včetně úroků, kterou získáme pravidelným střeďáním (spořením, ukládáním) částky.

Na začátku období ukládáme pravidelně částku H , za T let naspoříme částku K , přičemž i je roční úroková míra

$$S^- = q \times \frac{q^T - 1}{q - 1} \quad \text{střadatel předlhůtní kde } q = (1+i)$$

$$K = H \times q \times \frac{q^T - 1}{q - 1} = H \times q \times \frac{q^T - 1}{q - 1} H \times (1+i) \times \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

Na konci období ukládáme pravidelně částku H , za T let naspoříme částku K , přičemž i je roční úroková míra

$$S^+ = \frac{q^T - 1}{q - 1} \quad \text{střadatel polhůtní}$$

$$K = H \times \frac{q^T - 1}{q - 1} = H \times \frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

Zásobitel

Koeficient pro výpočet současné hodnoty budoucích pravidelných výběrů (zásobuji se) včetně připsaných úroků.

Jak velkou částku K musíme dnes uložit na knížku, jestliže chci každý rok vybírat částku H , přičemž i je roční úroková míra.

$$Z^+ = \frac{q^T - 1}{q^T \times (q - 1)} = S^+ \times \frac{1}{q^T} \quad \text{zásobitel}$$

$$K = H \times \frac{q^T - 1}{q^T \times (q - 1)} = H \times \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \times [(1+i) - 1]}$$

$$PV = H \times \frac{q^T - 1}{q^T \times (q - 1)} = H \times \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \times [(1+i) - 1]}$$

Vztahy mezi střadatelem a zásobitelem:

$$FV = PV * (1+i)^T \text{ odpovídá } S = Z * (1+i)^T \text{ tedy } Z = \frac{S}{q^T}$$

Anuita

Koeficient pro výpočet pravidelných budoucích polhůtních plateb včetně úroku ze současné hodnoty (Splácení půjčky).

Jak velkou konstantní splátku s (anuitu) budu splácet na konci období, mám - li úvěr velikosti U při úrokové míře i , kde T je počet let splatnosti úvěru. Anuitní splátka je po celou dobu splácení konstantní a mění se poměr úmoru a úroku.

$$a = \frac{q^T \times (q - 1)}{q^T - 1} = \frac{(1+i)^T \times [(1+i) - 1]}{(1+i)^T - 1} = \frac{1}{Z^+} \quad \text{a} \quad \text{anuitní koeficient}$$

$$s = U * \frac{q^T * (q - 1)}{q^T - 1} = U * a$$

Perpetuita

Věčný výnos, neboli nekonečný pravidelný hotovostní tok pravidelných peněžních příjmů ve stejné výši. Současnou hodnotu perpetuity, což odpovídá zásobiteli limitně jdoucímu do nekonečna, vypočteme jako:

$$p = \frac{1}{i}$$

$$PV = A * \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{q^T - 1}{q^T * (q - 1)} \right) = \frac{A}{i}$$

A výše perpetuity (pravidelná platba) za jedno období

i roční úroková míra

Pozn.: Ve všech příkladech uvedených níže počítejte se smíšeným úročením a německým standardem 30E/360 (rok má 360 dní a měsíc 30 dní).

1. Příklad (řešený)

Za 43 let plánujete odchod do důchodu. Na začátku každého měsíce si budete spořit stejnou částku, roční úroková míra fondu je 4 % p.a. s pololetním připisováním úroků (4 % p.a./p.s.) Jakou částku si můžete po dobu 12 let vybírat na konci každého roku v důchodu, jestliže jste si během doby spoření na důchod naspořili 2 000 000 Kč?

1. Krok: Výpočet měsíční spořené částky:

Částka uspořená za jedno pololetí pomocí polhůtního střadatele.

$$2\,000\,000 = H \times \frac{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{43 \cdot 2} - 1}{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right) - 1}$$

$$H = \frac{2\,000\,000}{224,5268} = 8907,62 \text{ Kč}$$

Pololetní úložka rozpočítaná na jednotlivé měsíce pomocí jednoduchého předlhůtního střadatele:

$$8907,62 = H \times \left(6 + \frac{6+1}{2} \times 0,02\right)$$

$$H = \frac{8907,62}{6,07} = 1467,48 \text{ Kč je třeba ukládat vždy na začátku měsíce}$$

2. Krok: Výpočet výše důchodu:

Spočítáme i_{ef}

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^2 - 1 = 0,0404 \text{ tj. } 4,04 \% \quad (\text{zaokrouhlit na dostatečný počet desetinných míst!})$$

Polhůtní zásobitel

$$2\,000\,000 = H \times \frac{(1 + 0,0404)^{12} - 1}{(1 + 0,0404)^{12} \times 0,0404} = H \times \frac{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 12} - 1}{\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 12} \times \left(\left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^2 - 1\right)}$$

$$H = \frac{2\,000\,000}{9,363330} = 213\,599,23 \text{ Kč}$$

2. Příklad

Kolik uspoříme za jeden rok, budeme – li pravidelně na začátku nebo na konci měsíce ukládat částku 1 500 Kč a roční úroková sazba bude činit a) 2,5 % s ročním úrokováním (2,5 % p.a./p.a.), b) s čtvrtletním úrokováním (2,5 % p.a./p.q.) a c) s měsíčním úrokováním (2,5 % p.a./p.m.)?

3. Příklad

Firma ukládá každoročně vždy na začátku/na konci roku na firemní účet částku ve výši 40 000 Kč. Banka poskytuje úrok 10 % p.a., kolik bude na účtu peněz po 5 letech?

4. Příklad

Jakou částku musíme dnes uložit na účet, aby z něj bylo možné po dobu 10 let při roční úrokové míře 4,8 % s čtvrtletním připisováním úroků (4,8 % p.a./p.q.) na konci každého roku čerpat částku 55 000 Kč.

5. Příklad

Rozhodli jste se v aktivní části života pravidelně spořit po dobu 17 let. Budete pravidelně na začátku měsíce spořit částku 1500 Kč při úrokové sazbě 2,4 % p.s./p.q. Kolik si naspoříte za danou dobu?

6. Příklad

Jakou částku musíme dnes uložit na účet, aby z něj bylo možné po dobu 10 let při roční úrokové míře 4,4 % s čtvrtletním připisováním úroků (4,4 % p.a./p.q.) na konci každého měsíce čerpat částku 5 000 Kč.

7. Příklad

Spotřebitelský úvěr ve výši 150 000 Kč je nutné splácet po dobu 5 let stejnými měsíčními částkami. Vypočtěte výši splátky, pokud je úroková míra 12 % p.a./p.m.

8. Příklad

Nadace „Energie pro budoucnost“ plánuje každoročně peněžně odměnit 3 nejlepší inovativní návrhy v oblasti úspor energie, odměna bude činit 25 000 Kč/návrh. Kolik peněz musí zakladatelé vložit do fondu, aby tyto odměny mohly být vypláceny každý rok po neomezenou dobu? Fond je úročen 4 % p.a./p.s.

9. Příklad

Můžete od banky získat hypoteční úvěr, jestliže kupní cena vaší vybrané nemovitosti je 4 500 000 Kč? Banka vám půjčí maximálně 85 % ceny nemovitosti. Doba splácení bude 25 let se stálým úrokem 2,5 % (p.a./p.a.) po celou dobu splácení. Dle výpočtu banky vaše volné měsíční prostředky za celou rodinu jsou ve výši 17 200 Kč.

10. Příklad

Jako vítěz soutěže si můžete vybrat mezi těmito peněžními odměnami:

- 95 000 Kč okamžitě
- 165 000 Kč koncem 5. roku
- Každý rok po dobu 10 let částku 15 000, která vám bude na začátku každého roku ukládána na účet s roční úrokovou sazbou 10,5 % p.a.
- 9 900 Kč každý rok, po věčné časy

Oportunitní výnos pro všechny varianty je 8 %. Kterou variantu si vyberete?

11. Příklad

Každý rok ukládáte na konci každého roku částku ve výši 3 000 Kč. Za jak dlouho budete mít na účtu 18 000 Kč, je – li úroková míra 4,9 % p.a./p.q.? Kolik bude činit poslední splátka?

12. Příklad

Zavedli jste si spoření k důchodu. Budete ukládat pravidelně měsíčně částku 1.000,- Kč po dobu 40 let. Částku vkládáte na konci každého měsíce. Reálné zhodnocení takto ukládaných prostředků očekáváte ve výši 3 % p.a. Jakou maximální konstantní měsíční částku si můžete vybírat z naspořených peněz po dobu 30 let, za předpokladu, že reálné zhodnocení prostředků v tomto období budou 2 % p.a. (předpokládejte výběr prostředků na začátku měsíce)? Po celou dobu očekáváte roční míru inflace 2 %. Výnosy počítejte v celých procentech.

Příklady pro procvičení:

Příklad 1

Zákazník chce koupit nemovitost za 130 000 \$. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 30 000 \$. Zbytek má zaplatit v měsíčních splátkách za 15 let. Kolik bude činit měsíční splátka při úrokové míře 15 % p.a./p.m?

Řešení:

*Měsíční splátka bude činit **1399,59 \$**.*

Příklad 2

Vkladatel chce dosáhnout 5 000 \$ při pravidelných vkladech 1 000 \$ na konci každého roku. Jak dlouho musí šetřit při 5% roční úrokové míře (p.a./p.a.) a jaká bude poslední splátka?

Řešení:

*Poslední splátka bude činit **474,40 \$**.*

Příklad 3

Za 5 let plánujete koupit nového automobilu v hodnotě 950 000 Kč. Jak velkou částku musíte pravidelně vždy na začátku pololetí spořit, jestliže úroková míra fondu je 1,8 % p.a./p.s.?

Řešení:

*Pololetní úložka = **90 402,07 Kč***

Příklad 4

Příští 3 roky si plánujete spořit na luxusní dovolenou v hodnotě 250 000 Kč. Naspoříte tuto částku, pokud si budete pravidelně spořit 6 500 Kč vždy na konci každého měsíce a fond je úročen úrokovou mírou 2,4 % p.a./p.a.?

Řešení:

*Uspořeno = **242 297,20 Kč***

Příklad 5

Za 48 let plánujete odchod do důchodu. Na začátku každého roku si budete spořit stejnou částku, roční úroková míra fondu je 4 % p.a. s pololetním úročením. Jakou částku si musíte spořit a kolik celkem uspoříte, jestliže si chcete v důchodu vybírat 240 000 Kč koncem každého roku po dobu 20 let?

Řešení:

*Naspořeno = **3 250 155,95 Kč***

*Roční úložka = **22 169,15 Kč***

Příklad 6

Kolik si budete koncem měsíce pravidelně vybírat po dobu 15 let z naspořených peněz 1 500 000 Kč při zhodnocení zůstatku ročním úrokem 3,5 % s měsíčním přispíváním úroků.

Řešení:

Měsíční výběr = 10 723,24 Kč

Příklad 7

Chcete si po dobu plánovaného důchodu (20 let) vybírat pravidelně koncem každého měsíce 5 000 Kč. Kolik si musíte během aktivního života naspořit, jestliže bankovní fond je zhodnocován s ročním úrokem 3,2 % s čtvrtletním úročením.

Řešení:

Naspořený důchod = 886 162,70 Kč

Příklad 8

Chcete si po dobu plánovaného důchodu (20 let) vybírat pravidelně koncem každého roku 70 000 Kč. Kolik si musíte během aktivního života naspořit, jestliže bankovní fond je zhodnocován s ročním úrokem 3,4 % s čtvrtletním úročením.

Řešení:

Naspořený důchod = 999 964,88 Kč

Příklad 9

U bankovního ústavu jste si sjednali „Půjčku na cokoliv“ ve výši 80 000 Kč s dobou splatnosti 4 roky. Půjčku budete splácet vždy na konci měsíce a roční úroková sazba je stanovena na 12,96 % s měsíčním úročením (12,96 % p.a./p.m.). Určete výši měsíční splátky.

Řešení:

Splátka = 2 144,61 Kč

Příklad 10

Nadace "Student" hodlá každoročně vyplácet peněžní odměny deseti nejlepším studentům v celkové výši 150 000 Kč. Jak velká částka musí nyní být vložena do fondu nadace, aby tato částka mohla být vyplácena každoročně (po nekonečně dlouhou dobu)? Fond nadace je úročen 2 % p.a./p.q.

Řešení:

Vklad = 7 443 983,79 Kč

RPSN - roční procentní sazby nákladů na spotřebitelský úvěr

Jeden ze základních ukazatelů pro posouzení výhodnosti úvěru či půjčky. Tento ukazatel je daný zákonem č. 257/2016 sb., o spotřebitelském úvěru. Na rozdíl od úrokové sazby tento ukazatel zahrnuje veškeré dodatečné náklady jako je poplatek za poskytnutí úvěru i poplatek za vedení úvěrového účtu a další povinné platby a poplatky.

Takto to najdete v zákoně:

Roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr se vypočítá podle následujícího vzorce, kde i je hledaná roční procentní sazba nákladů na spotřebitelský úvěr, kterou je možno vypočítat (buď algebraicky nebo numericky opakovanými aproximacemi na počítači), jestliže jsou hodnoty ostatních veličin rovnice známy buď ze smlouvy nebo odjinud.

$$A_k = \sum_{l=1}^n \frac{A_l}{(1+x)^{t_l}}$$

Význam písmen a symbolů:

k je pořadové číslo půjčky

A_k je výše půjčky

l je číslo splátky

A_l je výše splátky číslo l

M je číslo poslední půjčky

n je číslo poslední splátky

t_l je interval, vyjádřený v počtu roků a ve zlomcích roku, ode dne půjčky do následných splátek č. 2 až n .

V této rovnici na levé straně je celková současná hodnota peněžních toků půjčky A_k . Na pravé straně stojí součet všech peněžních toků splátek A_l , v obdobích 1 až n , vyjádřených v letech. Mocnitel t_l je doba, která uplynula od poskytnutí úvěru vyjádřená také v letech.

Hledáme takové X , aby levá a pravá strana rovnice si byly rovny. Hodnota X je pak roční procentní sazba nákladů (RPSN).

Příklad

Půjčíte si 30 000,-Kč na nákup elektrospotřebiče. Poplatek za půjčku je 1 500 Kč Půjčku splatíte ve dvou anuitních splátkách s úrokem 15 % p.a./p.m. Jaká je výše RPSN ?

$$30000 = 1500 + \frac{15281,8}{(1+x)^{\frac{1}{12}}} + \frac{15281,8}{(1+x)^{\frac{2}{12}}}$$

Analytické řešení jedné rovnice o jedné neznámé hodnotě:

$$RPSN \approx x = 75,3 \%$$