

Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno a příjmení:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	Σ
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k funkce $f(z)$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}$.
- Jsou-li a_n a b_n reálné a c_n komplexní Fourierovy koeficienty, pak $a_n = c_n + c_{-n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a $b_n = i(c_n - c_{-n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Pro $a > 0$ je $\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ a $\mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ a $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$.

Zadání A

1. Vypočtěte integrál

$$\int_C z e^z + \frac{3|z|}{z} - \bar{z} dz$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

2. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)^2}.$$

(a) Nalezněte Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 2. Dále určete mezikruží konvergence této řady.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = \frac{1}{(z-2)^{50}} f(z)$ a nalezněte $\text{res}_2 g(z)$.

3. Je dána funkce $f(t) = te^t$, $t \in [0, 1]$.

(a) Nalezněte komplexní Fourierovu řadu funkce $f(t)$.

(b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce $f(t)$.

(c) K jaké funkci konverguje Fourierova řada z bodu (a) na intervalu $[3, 4]$?

4. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} \mathbf{1}(\tau) y(t-\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

(Nápověda: $\mathcal{F} [e^{-|t|} \mathbf{1}(t)] (\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ a $\mathcal{F} [e^{-|t|}] (\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.)

5. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \frac{n-3^n}{n!}.$$

(a) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

(b) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$.

Zadání B

1. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3} - \frac{\sin z}{z^4}.$$

- (a) Určete hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 0.
- (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + \frac{1}{1+e^{iz}}$.
- (c) Vypočtěte $\text{res}_0 g(z)$, kde $g(z)$ je funkce z bodu (b).

2. Vypočtěte

$$\int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - \frac{1}{2}| = 1$.

3. Je dána funkce

$$f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-2).$$

- (a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(3t)e^{-2it}$.
- (c) Z definice konvoluce vypočtěte $(f * f)(t)$.

4. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 1$$

splňující $y(0) = y'(0) = 0$.

5. Je dána funkce

$$F(z) = \frac{4}{z^2 + 2z - 3}.$$

- (a) Rozložte funkci $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí bodu ∞ .
- (b) Využitím výsledku z bodu (a) určete inverzní Z -transformaci funkce $F(z)$.

Zadání C

1. Je dána funkce

$$u(x, y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

- (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická na \mathbb{R}^2 .
- (b) Pro všechny kladné hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na \mathbb{C} .

2. Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z - 3)^2}$$

do mocninné řady na okolí bodu -1 . Dále určete poloměr konvergence této řady.

3. Je dána funkce $f(t) = t^2$, $t \in [-\pi, \pi]$.

- (a) Nalezněte komplexní Fourierovu řadu funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte reálnou Fourierovu řadu funkce $f(t)$.
- (c) Nalezněte součet Fourierovy řady z bodu (a) na intervalu $[5\pi, 7\pi]$.

4. Spojitá funkce $f(t)$ z $L^1(\mathbb{R})$ má Fourierovu transformaci

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

- (a) Nalezněte funkci $f(t)$.
- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(t + 1) \cos(2t)$.

5. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y'(t) - 3 \int_0^t e^{-2\tau} y(t - \tau) d\tau = -4e^{-3t}$$

splňující $y(0) = 1$.

Zadání D

1. Je dána funkce

$$u(x, y) = e^{-\alpha x} \sin(2y) + \beta y,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

- (a) Určete všechny hodnoty parametrů α a β , pro které je funkce $u(x, y)$ harmonická na \mathbb{R}^2 .
- (b) Nalezněte kladnou hodnotu parametru α , parametr β a funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na \mathbb{C} a $f(i\pi) = 2$.

2. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} dx.$$

3. Je dána funkce

$$f(t) = (t - 3)e^{-t^2}.$$

- (a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $(f * f')(t)$.
- (c) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(3t + 4)e^{it}$.

4. Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi), \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

- (a) Zapište $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.
- (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$.
- (c) Nalezněte Laplaceovu transformaci periodické funkce $g(t)$, která má periodu $T = 2\pi$ a na intervalu $[0, 2\pi)$ je dána předpisem $g(t) = f(t)$.

5. Pomocí Z -transformace nalezněte řešení rovnice

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

splňující $y_0 = 0$ a $y_1 = 1$.

Zadání E

1. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2} dx.$$

2. Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2}$$

a určete její poloměr konvergence.

3. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 16}.$$

(a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

(b) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(t)$, kde

$$g(t) = f(3t) + e^{-\frac{(t-1)^2}{4}}.$$

4. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y''(t) + y(t) = t - (t-1)\mathbf{1}(t-1)$$

splňující $y(0) = y'(0) = 0$.

5. Z -transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je

$$F(z) = \ln \left(1 + \frac{9}{z^2} \right).$$

(a) Pomocí rozvoje do Laurentovy řady nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

(b) Nalezněte prvních pět členů posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = b_1 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ je $b_n = 0$.

(c) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(na_n)_{n=0}^{\infty}$.

Zadání F

1. Je dána funkce

$$u(x, y) = x^3y - xy^3 + 6xy - 3y.$$

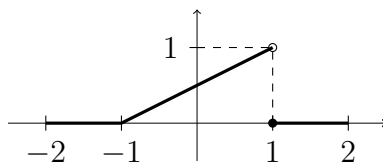
- (a) Ověřte, že $u(x, y)$ je harmonická funkce na \mathbb{R}^2 .
- (b) Nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na \mathbb{C} a $f(1 + i) = 3 + 5i$.

2. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{3}{z^{12} + 4z^{10}}.$$

- (a) Určete rozvoj funkce $f(z)$ do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu 0.
- (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$.
- (c) Vypočtěte $\text{res}_0 \left[\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z) \right]$.

3. Funkce $f(t)$ má graf



- (a) Nalezněte komplexní Fourierovu řadu funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte součet Fourierovy řady z bodu (a) na intervalu $[2, 6]$.

4. Nalezněte inverzní Laplaceovu transformaci funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 4} + \frac{e^{-3s}}{s + 1}.$$

5. Pomocí Z -transformace nalezněte řešení rovnice

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = n$$

splňující $y_0 = y_1 = 0$.

Stručná řešení

Zadání A

1. Z Cauchyovy věty plyne, že $\int_C z e^z dz = 0$. Z definice krivkového integrálu máme

$$\int_C \frac{3|z|}{z} - \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{e^{it}} - 2e^{-it} \right) 2ie^{it} dt = 4\pi i.$$

Odtud $\int_C z e^z + \frac{3|z|}{z} - \bar{z} dz = 4\pi i$.

2. (a)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{2(z-2)^2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-2} \quad \text{pro } 0 < |z-2| < 2. \end{aligned}$$

Mezikruží konvergence je určeno nerovnostmi $0 < |z-2| < 2$.

(b) Funkce g má v bodě 0 jednoduchý pól a v bodě 2 má pól řádu 52. Díky (a) je $g(z) = \frac{1}{(z-2)^{52}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-52}$ pro $0 < |z-2| < 2$. Proto $\text{res}_2 g(z) = \frac{1}{2^{52}}$.

3. (a) Fourierova řada funkce f je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}$, kde

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 t e^t e^{-2\pi i n t} dt = \left[t \frac{e^{t(1-2\pi i n)}}{1-2\pi i n} \right]_0^1 - \frac{1}{1-2\pi i n} \int_0^1 e^{t(1-2\pi i n)} dt \\ &= \frac{e}{1-2\pi i n} - \frac{e-1}{(1-2\pi i n)^2}. \end{aligned}$$

(b) Reálná Fourierova řada funkce f je $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)$, kde

$$\begin{aligned} a_n &= 2\text{Re } c_n = \frac{2e}{1+4\pi^2 n^2} - \frac{2(e-1)(1-4\pi^2 n^2)}{(1+4\pi^2 n^2)^2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= -2\text{Im } c_n = -\frac{4\pi n e}{1+4\pi^2 n^2} + \frac{8(e-1)\pi n}{(1+4\pi^2 n^2)^2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$(c) \mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} (t-3)e^{t-3}, & \text{je-li } t \in (3, 4); \\ \frac{e}{2}, & \text{je-li } t \in \{3, 4\}. \end{cases}$$

4. Aplikací Fourierovy transformace dostaneme $\hat{y}(\omega) + \frac{1}{1+i\omega} \hat{y}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$. Vyjádříme-li $\hat{y}(\omega)$, dostaneme $\hat{y}(\omega) = \frac{4(\omega-i)}{(\omega-2i)^2(\omega+2i)}$. Odtud

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} i \text{res}_{2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} = \left(\frac{3}{4} - t\right) e^{-2t} & \text{pro } t \geq 0, \\ -i \text{res}_{-2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{3}{4} e^{2t} & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Celkem tak máme $y(t) = \frac{3}{4} e^{-2|t|} - t e^{-2t} \mathbf{1}(t)$.

5. (a) $\mathcal{L}[a_n](z) = \mathcal{L}\left[\frac{n}{n!}\right](z) - \mathcal{L}\left[\frac{3n}{n!}\right](z) = -z \left(\mathcal{L}\left[\frac{1}{n!}\right](z)\right)' - \mathcal{L}\left[\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} - e^{\frac{z}{3}}$.

(b) $\mathcal{L}[a_{n+2}](z) = z^2 \left(\mathcal{L}[a_n](z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right) = z e^{\frac{1}{z}} - z^2 e^{\frac{z}{3}} + z^2 + 2z$.

Zadání B

- (a) $f(z) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right) - \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -\frac{1}{z^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{z} + \dots$. Hlavní část Laurentovy řady funkce f na $P(0)$ proto je $-\frac{1}{z^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{z}$.
 - (b) Bod 0 je pól řádu 3 funkce g , což plyne z (a). Body $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly funkce g .
 - (c) Z (a) plyne, že $\text{res}_0 g(z) = \frac{2}{3}$.

$$2. \int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} dz = 2\pi i \left(\text{res}_0 \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} + \text{res}_1 \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)} \right) = i - \frac{8i}{7}.$$

- (a) $\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^2 e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega} - e^{-2i\omega}}{i\omega}$ pro $\omega \neq 0$. Ze spojitosti funkce \hat{f} plyne, že $\hat{f}(0) = 3$.
 - (b)

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \mathcal{F} [f(3t)e^{-2it}] (\omega) = \mathcal{F} [f(3t)] (\omega + 2) = \frac{1}{3} \hat{f} \left(\frac{\omega + 2}{3} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i\frac{\omega+2}{3}} - e^{-2i\frac{\omega+2}{3}}}{i(\omega+2)} & \text{pro } \omega \neq 2, \\ 1 & \text{pro } \omega = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (f * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_{-1}^2 \mathbf{1}(t - \tau + 1) - \mathbf{1}(t - \tau - 2) d\tau \\ &= \int_{t-2}^{t+1} \mathbf{1}(u + 1) - \mathbf{1}(u - 2) du \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty); \\ t + 1 & \text{pro } t \in [-2, 1); \\ 4 - t & \text{pro } t \in [1, 4]. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Aplikací Laplaceovy transformace dostaneme $s^2 Y(s) + 4s Y(s) + 13 Y(s) = \frac{1}{s}$. Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 13)} = \frac{1}{s(s + 2 - 3i)(s + 2 + 3i)}.$$

Protože $z_1 = 0$, $z_2 = -2 + 3i$ a $z_3 = -2 - 3i$ jsou jednoduché póly, je

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 \text{res}_{z_i} Y(s) e^{st} = \frac{1}{13} - \frac{2}{39} e^{-2t} \sin(3t) - \frac{1}{13} e^{-2t} \cos(3t)$$

pro $t \geq 0$.

5. (a)

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1+\frac{3}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{z^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n 3^{n-1}}{z^n} \quad \text{pro } |z| > 3. \end{aligned}$$

- (b) Z (a) plyne, že $\mathcal{L}^{-1} [F(z)] (0) = 0$ a $\mathcal{L}^{-1} [F(z)] (n) = 1 + (-1)^n 3^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Zadání C

- Přímočárým výpočtem zjistíme, že $\Delta u = 0$ právě tehdy, když $1 - \alpha^2 = 0$ nebo $\alpha = 0$. Funkce u je proto harmonická na \mathbb{R}^2 právě tehdy, když $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.
 - At $\alpha = 1$. Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou $\frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x + 3y + 1$ a $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y \sin x - 3x$. Integrací první podmínky dostaneme $v(x, y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y + C(x)$, kde $C(x)$ je zatím neurčená reálná funkce proměnné x . Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x) = -3x$. Tedy $C(x) = -\frac{3}{2}x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Proto $v(x, y) = e^y \cos x + \frac{3}{2}y^2 + y - \frac{3}{2}x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$.

2. Protože

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z+1}{4}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}(z+1)^{n-1}$$

pro $|z+1| < 4$, je

$$f(z) = (z+1)\frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}(z+1)^n$$

pro $|z+1| < 4$. Poloměr konvergence je 4.

- Fourierova řada funkce f je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int} dt = \begin{cases} \frac{2(-1)^n}{n^2} & \text{pro } n \neq 0, \\ \frac{\pi^2}{3} & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

- Z (a) plyne, že $2\operatorname{Re} c_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $2\operatorname{Re} c_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ a $-2\operatorname{Im} c_n = 0$, kde $n \in \mathbb{N}$. Reálná Fourierova řada funkce f proto je $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$.

- $\mathcal{F}_f(t) = (t - 6\pi)^2$, $t \in [5\pi, 7\pi]$.

- Protože $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$, je

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \begin{cases} i \left(\operatorname{res}_{2i} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} + \operatorname{res}_i \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \right) = \frac{i}{6} (e^{-t} - e^{-2t}) & \text{pro } t \geq 0, \\ -i \left(\operatorname{res}_{-2i} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} + \operatorname{res}_{-i} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \right) = -\frac{i}{6} (e^t - e^{2t}) & \text{pro } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtud $f(t) = \frac{i}{6} (e^{-|t|} - e^{-2|t|}) \operatorname{sgn} t$, $t \in \mathbb{R}$.

- $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F} \left[f(t+1) \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \right] (\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F} [f(t+1)] (\omega-2) + \frac{1}{2} \mathcal{F} [f(t+1)] (\omega+2) = \frac{1}{2} e^{i(\omega-2)} \hat{f}(\omega-2) + \frac{1}{2} e^{i(\omega+2)} \hat{f}(\omega+2) = \frac{1}{2} \frac{(\omega-2)e^{i(\omega-2)}}{(\omega-2)^4+5(\omega-2)^2+4} + \frac{1}{2} \frac{(\omega+2)e^{i(\omega+2)}}{(\omega+2)^4+5(\omega+2)^2+4}$.

- Aplikací Laplaceovy transformace dostaneme $sY(s) - 1 - \frac{3}{s+2}Y(s) = -\frac{4}{s+3}$. Laplaceův obraz řešení proto je $Y(s) = \frac{s+2}{(s+3)^2}$. Odtud

$$y(t) = \operatorname{res}_{-3} Y(s) e^{st} = (1-t)e^{-3t},$$

$t \geq 0$.

Zadání D

- Přímočárým výpočtem zjistíme, že $\Delta u = 0$ právě tehdy, když $\alpha^2 - 4 = 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Proto u je harmonická na \mathbb{R}^2 právě tehdy, když $\alpha \in \{-2, 2\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$.
 - Z rovnosti $f(i\pi) = 2$ plyne, že $\beta = \frac{2}{\pi}$. Díky (a) víme, že $\alpha = 2$ je jediná kladná hodnota parametru α , pro kterou může být u reálnou částí holomorfní funkce. Pro tyto hodnoty parametrů dostaneme Cauchyovy-Riemannovy podmínky ve tvaru $\frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-2x} \sin(2y)$ a $\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-2x} \cos(2y) - \frac{2}{\pi}$. Z první podmínky máme $v(x, y) = e^{-2x} \cos(2y) + C(x)$. Dosazením do druhé podmínky dostaneme $C'(x) = -\frac{2}{\pi}$. Tedy $C(x) = -\frac{2}{\pi}x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Z $f(i\pi) = 2$ plyne, že $v(0, \pi) = 0$, a proto $K = -1$. Celkem tak máme $v(x, y) = e^{-2x} \cos(2y) - \frac{2}{\pi}x - 1$.

- Protože $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{3+i} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} = \frac{\pi}{e} (\cos 3 + i \sin 3)$, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} dx = \frac{\pi}{e} \sin 3.$$

-

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F} [te^{-t^2}] (\omega) - 3\mathcal{F} [e^{-t^2}] (\omega) = i \left(\mathcal{F} [e^{-t^2}] (\omega) \right)' - 3\mathcal{F} [e^{-t^2}] (\omega) \\ &= -\sqrt{\pi} \left(\frac{i\omega}{2} + 3 \right) e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

$$(b) \mathcal{F} [(f * f')(t)] (\omega) = \hat{f}(\omega) i\omega \hat{f}(\omega) = \pi i\omega \left(\frac{i\omega}{2} + 3 \right)^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

-

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \mathcal{F} [f(3t + 4)e^{it}] (\omega) = \mathcal{F} [f(3t + 4)] (\omega - 1) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{F} [f(t + 4)] \left(\frac{\omega - 1}{3} \right) = \frac{1}{3} e^{\frac{4i}{3}(\omega - 1)} \hat{f} \left(\frac{\omega - 1}{3} \right) \\ &= -\sqrt{\pi} \left(\frac{i(\omega - 1)}{18} + 1 \right) e^{\frac{4i}{3}(\omega - 1)} e^{-\frac{(\omega - 1)^2}{36}}. \end{aligned}$$

- $f(t) = (\cos t) (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)), t \in [0, \infty)$.

$$(b) \mathcal{L} [f(t)] (s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \mathcal{L} [\mathbf{1}(t - \pi) \cos t] (s) = \frac{s}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \mathcal{L} [\cos t] (s) = \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{s^2 + 1}.$$

- Z (b) a věty o Laplaceově transformaci periodické funkce máme

$$\mathcal{L} [g(t)] (s) = \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{(1 - e^{-2\pi s})(s^2 + 1)}.$$

- Aplikací Z -transformace dostaneme $z^2 (Y(z) - \frac{1}{z}) - 2zY(z) + Y(z) = \mathcal{Z} \left[\sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right] (z)$.
Obraz řešení proto je $Y(z) = \frac{z(z^2 + 2)}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$. Odtud

$$y_n = \operatorname{res}_i Y(z) z^{n-1} + \operatorname{res}_{-i} Y(z) z^{n-1} + \operatorname{res}_1 Y(z) z^{n-1} = \frac{i^n [1 + (-1)^n]}{4} + \frac{3n - 1}{2}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. (Pro $n = 0$ vzorec platí, neboť $z^{-1}Y(z)$ má v 0 pouze odstranitelnou singularitu, která do součtu reziduí nepřispěje.)

Zadání E

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{2+i} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2} = 0.$

2. Derivace zadané řady je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = z \cos z, z \in \mathbb{C}.$ Proto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = \int z \cos z dz = z \sin z + \cos z + C$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, kde $C \in \mathbb{C}$. Dosadíme-li $z = 0$, obdržíme $C = -1$. Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = z \sin z + \cos z - 1$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Poloměr konvergence je ∞ .

3. (a)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 16} dt = \begin{cases} -2\pi i \operatorname{res}_{-4i} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+16} = \frac{\pi}{4} e^{-4\omega} & \text{pro } \omega \geq 0, \\ 2\pi i \operatorname{res}_{4i} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+16} = \frac{\pi}{4} e^{4\omega} & \text{pro } \omega < 0. \end{cases}$$

Tedy $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{4} e^{-4|\omega|}, \omega \in \mathbb{R}.$

(b) $\check{g}(\omega) = \mathcal{F}^{-1} \left[f(3t) + e^{-\frac{(t-1)^2}{4}} \right] (\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} [f(3t)] (-\omega) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{(t-1)^2}{4}} \right] (-\omega) =$
 $\frac{1}{6\pi} \hat{f} \left(-\frac{\omega}{3} \right) + \frac{e^{i\omega}}{2\pi} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{t^2}{4}} \right] (-\omega) = \frac{1}{24} e^{-\frac{4}{3}|\omega|} + \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2}$

4. Aplikací Laplaceovy transformace obdržíme $s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$. Proto

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

Ať $g(t)$ je Laplaceův vzor k funkci $G(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Pak

$$g(t) = \operatorname{res}_{-i} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_i G(s)e^{st} + \operatorname{res}_0 G(s)e^{st} = t - \sin t.$$

Navíc $\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)} = e^{-s}G(s) = \mathcal{L} [g(t-1)\mathbf{1}(t-1)](s)$. Hledané řešení je

$$y(t) = g(t) - g(t-1)\mathbf{1}(t-1) = t - \sin t - [t-1 - \sin(t-1)]\mathbf{1}(t-1),$$

pro $t \geq 0$.

5. (a) Protože $\ln(1+\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta^n$ pro $|\zeta| < 1$, je

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{9^n}{z^{2n}}$$

pro $|z| > 3$. Odtud $a_0 = a_{2n+1} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} 9^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(b) Využitím výsledku z (a) a definice konvoluce dostaneme, že $c_0 = c_1 = 0$,
 $c_2 = c_3 = 9$ a $c_4 = -\frac{81}{2}$.

(c) $\mathcal{L} [na_n](z) = -zF'(z) = \frac{18}{z^2+9}$.

Zadání F

1. (a) Protože $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, je u harmonická na \mathbb{R}^2 .
 (b) Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2y - y^3 + 6y$ a $\frac{\partial v}{\partial x} = -x^3 + 3xy^2 - 6x + 3$. Z první podmínky plyne, že $v(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + 3y^2 + C(x)$. Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x) = -x^3 - 6x + 3$. Proto $C(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Navíc požadovaná rovnost $f(1+i) = 3+5i$ implikuje $v(1, 1) = 5$. Odtud $K = 1$. Tedy

$$v(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + 3y^2 - \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + 1.$$

2. (a) $f(z) = \frac{3}{4z^{10}} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z^2}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-10}$ pro $0 < |z| < 2$.
 (b) $\pm 2i$ jsou jednoduché póly a 0 je pól řádu 10.
 (c) Díky (a) je

$$\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z) = \frac{1}{z^{10}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-19} = \frac{3}{4} \frac{1}{z^{19}} + \dots + \frac{3}{4^9} \frac{1}{z^3} - \frac{3}{4^{10}} \frac{1}{z} + \frac{3}{4^{11}} z + \dots$$

$$\text{pro } 0 < |z| < 2. \text{ Proto } \text{res}_0 \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z) = -\frac{3}{4^{10}}.$$

3. (a) Fourierova řada funkce f je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{2}t}$, kde

$$c_n = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{t+1}{2} e^{-i\frac{\pi n}{2}t} dt = \begin{cases} \frac{(-i)^{n-1}}{2\pi n} + \frac{(-i)^n - i^n}{2\pi^2 n^2} & \text{pro } n \neq 0, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

$$(b) \mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [2, 3) \cup (5, 6], \\ \frac{t-3}{2} & \text{pro } t \in [3, 5), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 5. \end{cases}$$

4. Funkce $\frac{1}{s^4+1}$ má jednoduché póly v $s_1 = 1+i$, $s_2 = -1+i$, $s_3 = 1-i$ a $s_4 = -1-i$, a proto

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4+1} \right] (t) = \sum_{k=1}^4 \text{res}_{s_k} \frac{e^{st}}{s^4+1} = \frac{e^t}{8} (\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8} (\sin t + \cos t).$$

Navíc $\frac{e^{-3s}}{s+1} = e^{-3s} \mathcal{L}[e^{-t}](s) = \mathcal{L}[e^{-(t-3)} \mathbf{1}(t-3)](s)$. Odtud

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{e^t}{8} (\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8} (\sin t + \cos t) + e^{-(t-3)} \mathbf{1}(t-3).$$

5. Aplikací Z-transformace dostaneme $z^2Y(z) - zY(z) - 6Y(z) = -z \left(\frac{z}{z-1}\right)'$. Tedy

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-3)(z+2)}.$$

Odtud

$$y_n = \text{res}_{-2} Y(z) z^{n-1} + \text{res}_1 Y(z) z^{n-1} + \text{res}_3 Y(z) z^{n-1} = -\frac{n}{6} - \frac{1}{36} + \frac{3^n}{20} - \frac{(-2)^n}{45}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. (Pro $n = 0$ vzorec platí, neboť $z^{-1}Y(z)$ má v 0 pouze odstranitelnou singularitu, která do součtu reziduí nepřispěje.)