

Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Definice

Definice

Laplaceovou transformací funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ rozumíme komplexní funkci $\mathcal{L}[f] = F$ definovanou předpisem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts} dt$$

za předpokladu, že integrál konverguje pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

Příklad

- 1 $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > 0$.
- 2 Nechť $a \in \mathbb{C}$. Potom $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

Prostor L_0

Definice

Řekneme, že funkce $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ je **exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ tak, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0, \infty)$. Číslo α se nazývá **index růstu** funkce f .

Symbolem L_0 označíme množinu všech po částech spojitých funkcí exponenciálního řádu.

- Množina L_0 je uzavřená na lineární kombinace a (konečné) součiny (tj. je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak $f + g, \alpha f, fg \in L_0$).

Příklad

- 1 $1, t, \sin t$ a $\cos t$ jsou v L_0 .
- 2 Každý polynom je v L_0 .
- 3 $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
- 4 $e^{t^2} \notin L_0$.

Věta (O existenci Laplaceovy transformace)

Jestliže $f \in L_0$, pak její Laplaceův obraz $\mathcal{L}[f(t)](s)$ existuje a navíc je holomorfní na polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$, kde α je index růstu funkce f .

Důkaz: Vynecháváme ■

- Úmluva: V dalším nebudeme rozlišovat mezi funkcí $f \in L_0$ a funkcí, která vznikne z f dodefinováním nulou na intervalu $(-\infty, 0)$.

Definice

Funkce

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá **Heavisideova funkce**.

- Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že $f|_{[0, \infty)} \in L_0$, pak podle naší úmluvy nerozlišujeme mezi $f|_{[0, \infty)}$ a $f \cdot \mathbf{1}$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Tvrzení

Nechť $f, g \in L_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

- 1 $\mathcal{L} [f(t) + ag(t)] (s) = \mathcal{L} [f(t)] (s) + a\mathcal{L} [g(t)] (s)$.
- 2 Jestliže je a kladné reálné číslo, pak $\mathcal{L} [f(at)] (s) = \frac{1}{a}\mathcal{L} [f(t)] \left(\frac{s}{a}\right)$.
- 3 $\mathcal{L} [e^{at} f(t)] (s) = \mathcal{L} [f(t)] (s - a)$.
- 4 Jestliže je a kladné reálné číslo, pak $\mathcal{L} [f(t)\mathbf{1}(t - a)] (s) = e^{-as}\mathcal{L} [f(t + a)] (s)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Bod 4 lze (s využitím naší úmluvy) přepsat do tvaru

$$\mathcal{L} [f(t - a)\mathbf{1}(t - a)] (s) = e^{-as}\mathcal{L} [f(t)] (s).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad

① Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{a} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

② Pro $a \in \mathbb{C}$ je

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin t](s) = \frac{1}{(s - a)^2 + 1}.$$

③ Pro $a > 0$ je

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t - a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

④

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t - 2)e^t](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s - 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_0$, pak

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] (s) = s^n \mathcal{L} [f(t)] (s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, pak

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathcal{L}[t \sin t](s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu periodické funkce)

Jestliže $f \in L_0$ je periodická funkce (na intervalu $[0, \infty)$) s periodou $T > 0$ (tj. $f(t + T) = f(t)$ pro každé $t \in [0, \infty)$), pak

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k - 2, 2k - 1), \\ 0, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k - 1, 2k). \end{cases}$$

Potom

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}.$$

Definice

Nechť $f, g \in L_0$. Funkce $h = f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

se nazve **konvoluce** funkcí f a g .

- Chápeme-li funkce z předchozí definice dodefinované 0 na $(-\infty, 0)$, pak se definice konvoluce shoduje s definicí uvedenou v kapitole o Fourierově transformaci.
- $f * g$ existuje pro každé dvě funkce $f, g \in L_0$ a $f * g \in L_0$.
- Platí: $f * g = g * f$.

Konvoluce

Příklad

Nechť $f, g \in L_0$ jsou dány předpisy $f(t) = t$ a $g(t) = 1$. Potom

$$(f * g)(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L_0$, potom

$$\mathcal{L} [(f * g)(t)] (s) = \mathcal{L} [f(t)] (s) \mathcal{L} [g(t)] (s).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

- 1 $\mathcal{L} [1 * 1] (s) = \frac{1}{s^2}.$
- 2 $\mathcal{L} [t * e^t] (s) = \frac{1}{s^2(s-1)}.$

Inverzní Laplaceova transformace

- Necht' komplexní funkce $F(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce z L_0 . Jak najít její vzor?
- Pro nalezení vzoru potřebujeme najít řešení integrální rovnice

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- Vzor není určen jednoznačně (např. funkce z L_0 , které se liší jen na konečné množině, mají stejnou Laplaceovu transformaci).

Věta (Lerchova věta)

Jestliže $f, g \in L_0$ jsou spojité zprava v každém bodě intervalu $[0, \infty)$ a mají stejnou Laplaceovu transformaci, pak $f = g$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

- Značení: Symbolem $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ označíme funkci $f \in L_0$, která je spojitá zprava v každém bodě intervalu $[0, \infty)$ a splňuje $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$.

Věta (O inverzi)

Nechť $f \in L_0$ (dodefinovaná nulou na $(-\infty, 0)$) má index růstu α a f' je po částech spojitá na $[0, \infty)$. Jestliže $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, potom

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts} ds := \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{C(a,b)} F(s)e^{ts} ds,$$

kde $a > \alpha$ a $C(a, b)$ je úsečka s parametrizací $\varphi(\tau) = a + i\tau$, $\tau \in [-b, b]$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

- $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts} ds$ se nazývá **Riemannův-Mellinův vzorec** a přímka $\operatorname{Re} s = a$ se nazývá **Bromwichova linie**.

Důsledek

Nechť $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionální funkce taková, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$.

Předpokládejme, že z_1, \dots, z_n jsou všechny póly funkce $F(s)$. Potom

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] (t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(s)e^{st}$$

pro každé $t \in [0, \infty)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s + 3}{s^2 + 1} \right] (t) = 2 \cos t + 3 \sin t.$$

- Při splnění určitých předpokladů lze pomocí součtu reziduí hledat i vzory k jiným funkcím, než jsou funkce racionální. Do této skupiny patří například funkce tvaru

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 - e^{-sT}}.$$

kde $T > 0$ a P, Q jsou polynomy splňující $\text{st } P < \text{st } Q$.

Inverzní Laplaceova transformace

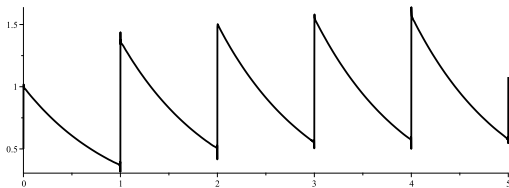
Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-1}} e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n + 1}.$$

Záměrně neznačíme $f(t)$ symbolem $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, neboť $f(t)$ není spojitá zprava na $[0, \infty)$.

Aproximace f tvaru $\frac{1}{1-e^{-1}} e^{-t} + \sum_{n=-1000}^{1000} \frac{e^{2\pi i n t}}{2\pi i n + 1}$ má graf:



Inverzní Laplaceova transformace

- Avšak vzorec se součtem reziduí nelze použít vždy!
- Hledáme-li vzor f k $F(s) = G(s)e^{-as}$, nalezneme nejdříve vzor g k funkci G a poté využijeme toho, že $f(t) = g(t - a)\mathbf{1}(t - a)$.

Příklad

- 1 Pro $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ je vzor $f(t) = \mathbf{1}(t - 1)$, ale formální využití vzorce s rezidui by dalo funkci $t \mapsto 1$.
- 2 $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}$ má vzor

$$f(t) = \left[\frac{1}{1-e} e^{-(t-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(t-1)}}{2\pi i n + 1} \right] \mathbf{1}(t - 1).$$

Aplikace na řešení diferenciálních rovnic

Příklad

Je dána úloha

$$y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Její řešení je $y(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t$ pro $t \geq 0$. Toto řešení lze evidentně prodloužit na \mathbb{R} .

