

Komplexní analýza

Laurentovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Motivace

Uvažme funkci

$$f(z) = \frac{1}{z-1}.$$

- Funkce $f(z)$ má rozvoj do mocninné řady ve tvaru

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

pro $|z| < 1$.

- Funkce $f(z)$ je ale definovaná i pro $|z| > 1$. Má pro taková z rozvoj do řady obsahující mocniny z ?
- Pokud připustíme i záporné mocniny, tak ano, protože

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 1$.

Laurentovy řady

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde z je komplexní proměnná, se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Konvergence Laurentovy řady

Definice

Řekneme, že Laurentova řada **konverguje** (resp. **konverguje absolutně**) v bodě $w \in \mathbb{C}$, jestliže v bodě $w \in \mathbb{C}$ konverguje (resp. absolutně konverguje) současně její hlavní a regulární část.

Nekonverguje-li Laurentova řada v bodě $w \in \mathbb{C}$, pak říkáme, že **diverguje** v bodě w .

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$. Říkáme, že Laurentova řada **konverguje na M** (resp. **absolutně konverguje na M**), jestliže konverguje (resp. absolutně konverguje) v každém bodě množiny M .

Součet Laurentovy řady

Definice

Nechť Laurentova řada konverguje na $M \subseteq \mathbb{C}$, funkce $s_r(z)$ je součet její regulární části na M a funkce $s_h(z)$ je součet její hlavní části na M .

Potom funkce $s_r(z) + s_h(z)$ se nazve **součtem** Laurentovy řady na M .

Je-li $f(z)$ součet řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ na M , pak píšeme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, z \in M.$$

Definice

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0; r; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

se nazve **mezikruží** o středu z_0 , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R .

Laurentovy řady a holomorfní funkce

Tvrzení

Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$ tak, že

- 1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$;
- 2 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| > r$ a diverguje pro $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně na mezikruží $P(z_0; r; R)$ a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Terminologie:

- $P(z_0; r; R)$ z předchozího tvrzení se nazývá **mekruží konvergence** Laurentovy řady.

Laurentovy řady a holomorfní funkce

Příklad

- 1 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} (z-i)^n$ má mezikruží konvergence $P(i; \frac{1}{2}; 2)$. Její součet na $P(i; \frac{1}{2}; 2)$ je $f(z) = \frac{1}{2(z-i)-1} + \frac{2}{2-(z-i)}$.
- 2 $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ diverguje v každém bodě $z \in \mathbb{C}$.

Věta (Rozvoj do Laurentovy řady)

Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží $P(z_0; r; R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se součtem $f(z)$ na $P(z_0; r; R)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka, která leží v $P(z_0; r; R)$ a má ve svém vnitřku bod z_0 .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Laurentovy řady a holomorfní funkce

Laurentova řada z předchozí věty se nazývá **Laurentův rozvoj** funkce f na $P(z_0; r; R)$.

Příklad

① $\frac{e^z}{z} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ na $P(0; 0; \infty)$.

② $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ na $P(0; 0; 1)$.

③ $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} -z^n$ na $P(0; 1; \infty)$.

④ $\frac{3}{z(3-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$ na $P(1; 1; 2)$.

Izolované singularity

Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f , jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

- 1 Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
- 2 Funkce $\frac{1}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
- 3 Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má izolovanou singularitu v 2.
- 4 Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v 0.
- 5 Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v 0.

Klasifikace izolovaných singularit

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

- 1 Řekneme, že z_0 je **odstranitelná singularita**, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.
- 2 Řekneme, že z_0 je **pól**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu.
- 3 Řekneme, že z_0 je **podstatná singularita**, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n .

Terminologie:

- Pól řádu k se také nazývá **k -násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.

Určování typů izolovaných singularit

Příklad

- 1 Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má odstranitelnou singularitu v 0.
- 2 Funkce $\frac{1}{z}$ má jednoduchý pól v 0.
- 3 Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má pól řádu 5 v 2.
- 4 Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má podstatnou singularitu v 0.

Kořen funkce

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$. Řekneme, že f má **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, jestliže $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Terminologie:

- místo kořen násobnosti k říkáme také **k -násobný kořen**.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní na okolí $U(z_0)$. Pak z_0 je kořen k -násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce g na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Póly a odstranitelné singularity

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže f má v $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a g má v z_0 kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě z_0

- 1 odstranitelnou singularitu, jestliže $m \geq n$;
- 2 pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- 1 $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
- 2 $\frac{1 - \cos z}{z^8 + z^5}$ má v 0 trojnásobný pól.
- 3 $\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}}$ má jednoduché póly v bodech $\frac{1}{2n\pi i}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bod 0 není izolovanou singularitou funkce $\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}}$.

Izolované singularity a limita

Věta (Charakterizace typů izolovaných singularit)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f .

- 1 *Funkce f má v z_0 odstanitelnou singularitu právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ je konečná.*
- 2 *Funkce f má v z_0 pól právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Funkce f má v z_0 k -násobný pól právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná nenulová.*
- 3 *Funkce f má v z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje.*

Důkaz: Vynecháváme. ■