Komplexní analýza

Reziduová věta a její aplikace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Motivace

Mějme holomorfní funkci $f(z)$ na $P(z_0; r; R)$, kde $r < R$.

- Nechť C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $P(z_0; r; R)$ taková, že $z_0 \in \operatorname{Int} C$. Jak vypočítat $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$?
- Informace o $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ je skryta v Laurentově rozvoji funkce f na $P(z_0; r; R)$.
- Víme, že $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$. Proto

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}.$$

Reziduum

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na $P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá reziduum funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Příklad

1. $\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)^3} = 0.$
2. $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^2} = 1.$

Výpočet rezidua

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *je* k*-násobný pól funkce* f*. Potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně: je-li z_0 jednoduchý pól funkce f, pak

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Příklad

Nechť $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)^2}$.

1. $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{4}$.
2. $\operatorname{res}_{-1} f(z) = -\frac{1}{4}$.

Výpočet rezidua

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

Jestliže $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkce* f *a* g *jsou holomorfní na* $U(z_0)$ *a splňují* $f(z_0) = g(z_0) = 0$*. Potom*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

$\mathrm{res}_0 \frac{1}{1-e^z} = -1.$

Výpočet rezidua

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkce* f *a* g *jsou holomorfní na* $U(z_0)$*. Jestliže* g *má v* z_0 *jednonásobný kořen, potom* $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Důkaz: Viz cvičení. ■

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{1}{1+e^{iz}} = i.$$

Reziduová věta

Věta (Reziduová věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je jednoduše souvislá oblast,* C *je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v* Ω *a* $S \subseteq \operatorname{Int} C$ *je konečná množina. Jestliže* f *je holomorfní na* $\Omega \setminus S$ *a body z množiny* S *jsou izolované singularity funkce* f*, potom*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w \in S} \operatorname{res}_w f(z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Ať C je kladně orientovaná hranice obdélníku o vrcholech $-i$, $4-i$, $4+i$, i. Pak

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{3\pi i}{16}.$$

Hlavní hodnota integrálu

- Pro „hezké" funkce f definujeme nevlastní (Riemannův) integrál předpisem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Při takové definici integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ neexistuje.
- V dalším budeme chápat integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ve smyslu tzv. Cauchyovy hlavní hodnoty:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ve smyslu hlavní hodnoty je $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = 0$.
- Existuje-li integrál jako nevlastní Riemannův, pak existuje i ve smyslu hlavní hodnoty.

Integrály z racionálních funkcí

Tvrzení

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy a

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}\,.$$

Jestliže $1 + \operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a Q nemá žádný reálný kořen, potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Integrály obsahující oscilující exponenciálu

Tvrzení

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$. Předpokládejme, že Q nemá žádný reálný kořen.

1. *Jestliže $\alpha > 0$ a $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

2. *Jestliže $\alpha < 0$ a $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}$, pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} \, \mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Integrály obsahující oscilující exponenciálu

Příklad

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi \sin 2}{e},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi \cos 2}{e}.\end{aligned}$$