

Úvod

Zadání

1. Nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z , jestliže

(a) $z = \frac{(1-2i)^2}{1+i}$;

(b) $z = (1+i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i}$;

(c) $z = \frac{2+3i}{1+2i} - \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$.

2. Dokažte, že pro všechna $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ a $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

3. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla z , jestliže

(a) $z = 3 + 4i$;

(b) $z = \frac{i^{31}}{2-i}$.

4. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla

$$z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{\sqrt{3}i - 1}$$

a s jeho pomocí nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z^{12} .

5. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n = -1.$$

6. Ukažte, že

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{je-li } \operatorname{Re} z > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } \operatorname{Im} z > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } \operatorname{Im} z < 0; \\ \pi, & \text{je-li } \operatorname{Im} z = 0 \text{ a } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

7. Ať $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Ukažte, že

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

8. Ať z, w jsou dvě nenulová komplexní čísla, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Ukažte, že $z = w$ právě tehdy, když $|z| = |w|$ a existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $\varphi = \psi + 2k\pi$.

9. Popište geometricky množinu všech $z \in \mathbb{C}$ splňujících

(a) $|z + 1| = 2$;

(b) $|z - 1| < 1$ a $|z| = |z - 2|$.

(c) $|z|^2 > z + \bar{z}$.

10. V oboru komplexních čísel řešte rovnici

(a) $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$;

(b) $z^3 = 1$;

(c) $z^4 = 81i$;

(d) $z^5 + 1 + i = 0$;

(e) $z^n = \bar{z}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

11. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad z \in \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \geq 1\}.$$

Nalezněte reálnou a imaginární část této funkce a interpretujte f geometricky. Dále nalezněte obraz přímky $\text{Im } z = 2$.

12. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$$

a rozhodněte, zda

$$i \in M = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(z) \geq 0, \text{Im } f(z) = 0\}.$$

13. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) = |z| + \frac{z - i}{z + 1}$$

a rozhodněte, zda

$$2i \in M = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } f(z) \geq 1, \text{Im } f(z) < 0\}.$$

14. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Im } z}{z}$. Pokud ano, spočtěte ji.

15. Ukažte, že funkce $f(z) = \arg z$ není v bodě -1 spojitá.

Výsledky

1. (a) $\operatorname{Re} z = -\frac{7}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$;
(b) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$;
(c) $\operatorname{Re} z = \frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.
3. (a) $z = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$;
(b) $z = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $\varphi = -\operatorname{arctg} 2$.
4. $z = \sqrt{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{Re} z^{12} = 2^6$ a $\operatorname{Im} z^{12} = 0$.
5. $n = 6k$, kde $k \in \mathbb{N}$.
9. (a) Kružnice o středu -1 a poloměru 2 .
(b) Úsečka bez krajních bodů $1 + i$ a $1 - i$.
(c) Množina bodů ležících vně kružnice o středu 1 a poloměru 1 .
10. (a) $z_n = 2(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{3} + n\pi$ a $n = 0, 1$;
(b) $z_n = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}$, kde $n = 0, 1, 2$;
(c) $z_n = 3(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ a $n = 0, 1, 2, 3$;
(d) $z_n = \sqrt[10]{2}(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{5}$ a $n = 0, 1, 2, 3, 4$;
(e) Pro $n = 1$ je řešení libovolné $z \in \mathbb{R}$; pro $n > 1$ je řešení $z = 0$ a také $z_m = \cos \varphi_m + i \sin \varphi_m$, kde $\varphi_m = \frac{2m\pi}{n+1}$, $m = 0, 1, \dots, n$.
11. $\operatorname{Re} f = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{y}{x^2+y^2}$. Bod z se zobrazí na bod $w = \frac{z}{|z|^2}$. Obraz přímky je kružnice (bez bodu 0) o poloměru $\frac{1}{4}$ a středu $\frac{i}{4}$.
12. $u(x, y) = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, $v(x, y) = \frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$ a $i \in M$.
13. $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2+y^2-y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$ a $2i \notin M$.
14. Neexistuje.