

Laplaceova transformace

Zadání

1. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = t \sin(t)$.

2. Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t + 1 & t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \cos t & t \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

(a) Pomocí Heavisideovy funkce $\mathbf{1}(t)$ zapište předpis pro funkci f .

(b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce f .

3. Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce s periodou $T > 0$, která je zadána předpisem $f(t) = \mathbf{1}(t - \frac{T}{2})$ pro $t \in [0, T)$.

4. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = |\sin(t)|$.

5. Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce

(a) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$;

(b) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1}$;

(c) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{1-3s}{s^4}$.

6. Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

7. Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(1-e^{-2s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

8. Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-2t}$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$.

9. Pomocí Laplaceovy transformace řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) = t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 4$.

10. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

Výsledky

1. $F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$
2. (a) $f(t) = \left(-\frac{2}{\pi}t + 1\right) [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] + \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) \cos t$.
(b) $\mathcal{L}[f(t)](s) = -\frac{2}{\pi s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}s}}{\pi s^2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$.
3. $\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s(1-e^{-Ts})}$.
4. $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$.
5. (a) $f(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$;
(b) $f(t) = \left(\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-(t-1)}}{2}\right) \mathbf{1}(t-1)$;
(c) $f(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - (t-1)e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2)$.
6. $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i\pi n t}}{2i\pi n}$.
7. $f(t) = \frac{1}{1-e^2}te^{-t} + \frac{2e^2}{(1-e^2)^2}e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi n t}}{2(1+i\pi n)^2}$.
8. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$ pro $t \geq 0$.
9. $y(t) = 4 + \frac{5t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$ pro $t \geq 0$.
10. $y(t) = 1 - [1 - \cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1)$ pro $t \geq 0$.