

Z-transformace

Zadání

1. Je dána posloupnost

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots).$$

- (a) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
- (b) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(2^n a_n - n a_n)_{n=0}^{\infty}$.
- (c) Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \geq 1$.
- (d) Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_1 = 1$ a $b_n = 0$ pro $n \neq 1$.
- (e) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$ z předchozího bodu.

2. Nalezněte inverzní Z -transformaci funkce

- (a) $F(z) = \frac{e^{\frac{5}{z}} - 1}{z^3}$;
- (b) $F(z) = \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)$;
- (c) $F(z) = \frac{1}{z^{100} + 1}$;
- (d) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}$.

3. Je dána funkce

$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{4}{z^2}\right) - \frac{1}{3z - 2}.$$

- (a) Nalezněte rozvoj $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí nekonečna.
- (b) Určete členy a_0, a_1, a_2 posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, která je inverzní Z -transformací funkce $F(z)$.
- (c) Určete členy c_0, c_1, c_2 posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty}$, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost z bodu (b).

4. Pomocí Z -transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = (-2)^n,$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 0, y_1 = 0$.

5. Pomocí Z -transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} + 4y_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

s počáteční podmínkou $y_0 = 4$.

6. Pomocí Z -transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^n 2^k y_{n-k} = n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = y_1 = 0$.

Výsledky

1. (a) $\frac{z^2}{z^2-1}$.
(b) $\frac{z^2}{z^2-4} - \frac{2z^2}{(z^2-1)^2}$.
(c) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
(d) $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $c_0 = 0$ a $c_n = a_{n-1}$ pro $n \geq 1$.
(e) $\frac{z}{z^2-1}$.
2. (a) $a_0 = \dots = a_4 = 0$ a $a_n = \frac{5^{n-3}}{(n-3)!}$ pro $n \geq 4$;
(b) $a_0 = 0$ a $a_n = -\frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$;
(c) $a_n = \begin{cases} (-1)^n, & \text{jestliže } n = 100(k+1) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$
(d) $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
3. (a) $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{nz^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}z^{n+1}}$.
(b) $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{34}{9}$.
(c) $c_0 = 0$, $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{31}{9}$.
4. $y_n = (-1)^n - \left(1 - \frac{n}{2}\right)(-2)^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
5. $y_n = -\frac{2^n}{3} + \frac{3^{n+1}}{7} - 2\frac{(-4)^n}{21} + 4(-4)^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
6. $y_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(6-n)$ pro $n \geq 1$.