Elementární funkce

Zadání

1. Ukažte, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí

   (a) $e^{z+w} = e^z e^w$;

   (b) $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$;

   (c) $e^z \neq 0$;

   (d) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

   (e) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;

   (f) $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

2. Ukažte, že $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

3. Nalezněte algebraický tvar komplexní čísla z, jestliže

   (a) $z = \ln(1 - i)$;

   (b) $z = \ln(-1 - \sqrt{3}i)$;

   (c) $z = \sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2)$;

   (d) $z = \cos(2 - 4i)$.

4. V oboru komplexních čísel řešte

   (a) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$;

   (b) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$;

   (c) $\cos z = 4$;

   (d) $\sin z = \cos z$;

5. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ položme

   $$M_a(z) = e^{a \operatorname{Ln} z} = \left\{ e^{a(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   ($M_a(z)$ se nazývá a-tá mocnina čísla z.)

   (a) Nalezněte $M_{\frac{1}{2}}(i)$ a $M_i(i)$.

   (b) Uvažme komplexní funkci $m_a(z) = e^{a \ln z}$ ($m_a(z)$ je hlavní hodnota a-té mocniny). Nalezněte $m_{\frac{1}{2}}(i)$ a $m_i(i)$. Vypočtěte derivaci funkce $m_a(z)$ na

   $$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}.$$

6. Ukažte, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $z \in \mathbb{C}$ je $(e^z)^n = e^{nz}$.

7. Ukažte, že obecně neplatí rovnost $m_a(e^z) = e^{az}$, kde $a, z \in \mathbb{C}$. (Návod: Zkoumejte hodnoty $m_a(e^z)$ a e^{az} například pro $z = 2\pi i$ a $a = \frac{1}{2}$.)

Výsledky

3. (a) $\ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$;
   (b) $\ln(-1-\sqrt{3}i) = \ln 2 - \frac{2\pi i}{3}$;
   (c) $\sin(\frac{\pi}{2} + i\ln 2) = \frac{5}{4}$;
   (d) $\cos(2-4i) = \cosh(4)\cos 2 + i\sinh 4\sin 2$.
4. (a) $z = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$;
   (b) $z = \pm\frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
   (c) $z = -i\ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
   (d) $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
5. (a) $M_{\frac{1}{2}}(i) = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}\}$ a $M_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} |\, k \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) $m_{\frac{1}{2}}(i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $m_i(i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m'_a(z) = am_{a-1}(z)$.