

Křivkový integrál

Zadání

1. Je dána funkce $f(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^\pi f(t) dt$.
2. Je dána funkce $f(t) = \frac{1}{t-i}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^1 f(t) dt$.
3. Nalezněte parametrizaci kladně orientované hranice trojúhelníku o vrcholech 0 , $1 - i$ a 2 .
4. Z definice vypočtěte $\int_C 3\operatorname{Im} z - 2\operatorname{Re} z dz$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1 + i$ a koncovým bodem i .
5. Z definice vypočtěte $\int_C \bar{z} dz$, kde C je půlkružnice se středem v 0 , poloměrem 2 , počátečním bodem $-2i$ a koncovým bodem $2i$.
6. Z definice vypočtěte $\int_C e^{z-\bar{z}} dz$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1 + i\frac{\pi}{2}$ a koncovým bodem 1 .
7. Z definice vypočtěte $\int_C \operatorname{Im} z dz$, kde C je spojení úseček $[0, 1 + i]$ a $[1 + i, 2]$.
8. Z definice vypočtěte $\int_C \frac{z+1}{z} dz$, kde C je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2 .

9. Vypočtěte integrál

$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \operatorname{Re} z dz$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = \frac{1}{2}$.

10. Vypočtěte integrál

$$\int_C ze^z + \frac{3|z|}{z} - \bar{z} dz$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

11. Vypočtěte

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem $2i$ a poloměrem 1 .

Výsledky

1. $f'(t) = ie^{it}$ a $\int_0^\pi f(t) dt = 2i$.

2. $f'(t) = -\frac{t^2+2it-1}{(t^2+1)^2}$ a $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

3. Například

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1-i)t, & t \in [0, 1], \\ 1-i + (1+i)(t-1), & t \in (1, 2], \\ 2-2(t-2), & t \in (2, 3]. \end{cases}$$

4. -2 .

5. $4\pi i$.

6. 1 .

7. 1 .

8. 0 .

9. $\frac{i\pi}{4}$.

10. $4\pi i$.

11. $\frac{\pi}{2}$.