

Mocninné řady

Zadání

1. Vypočtěte

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} i^n n$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3ni}{1+in}$.

2. Pomocí podílového nebo odmocninového kritéria rozhodněte, zda uvedené číselné řady konvergují absolutně nebo divergují:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3-4i)^n$.

3. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

4. Nalezněte poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} (z-i)^{2n}$.

5. Určete poloměr konvergence a v kruhu konvergence součet mocninné řady

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (z-2i)^n$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n$;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)}$.

6. Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady v okolí bodu z_0 a nalezněte kruh konvergence této řady, jestliže

(a) $f(z) = \sin z$ a $z_0 = 0$;

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$ a $z_0 = 1+i$;

(c) $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ a $z_0 = 1$;

(d) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a $z_0 = i$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ a $z_0 = 0$;

(f) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ a $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = z^2$ a $z_0 = 1$;

(h) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ a $z_0 = 1$;

(i) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ a $z_0 = 0$.

7. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$$(z - 1)f'(z) + f(z) = 0$$

splňující počáteční podmínku $f(0) = 1$.

8. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice

$$(z^2 + 1)f''(z) - 4zf'(z) + 6f(z) = 0$$

splňující počáteční podmínky $f(0) = 1$ a $f'(0) = -1$.

Výsledky

1. (a) ∞ .
(b) $-3 - 2i$.
2. (a) konverguje absolutně.
(b) diverguje.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
4. $R = \sqrt{3}$.
5. (a) $R = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n = ze^{-z}$;
(b) $R = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n} = (1 + 2z^2)e^{z^2}$;
(c) $R = 3, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} (z - 2i)^n = -\ln(3 + 2i - z) + \ln 3$;
(d) $R = 1, \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$;
(e) $R = 2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n = \ln(2+z) - \ln 2$;
(f) $R = 4, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^n(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z) + 16\ln 4$.
6. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ pro $z \in \mathbb{C}$;
(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-1-i)^n$ pro $|z-1-i| < \sqrt{2}$;
(c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n (z-1)^n$ pro $|z-1| < \frac{1}{3}$;
(d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[i^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \right] (z-i)^n$ pro $|z-i| < 1$;
(e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ pro $|z| < 1$;
(f) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}$ pro $|z| < 1$;
(g) $f(z) = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$ pro $z \in \mathbb{C}$;
(h) $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$;
(i) $f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ pro $|z| < 1$.
7. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$.
8. $f(z) = 1 - z - 3z^2 + \frac{1}{3}z^3$ pro $z \in \mathbb{C}$.