Laurentovy řady, izolované singularity a rezidua

Zadání

1. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2}$ do Laurentovy řady
   (a) na prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$;
   (b) na okolí bodu $z_0 = \infty$.

2. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ do Laurentovy řady na mezikruží daném nerovnostmi $1 < |z| < 3$.

3. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$, jestliže
   (a) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1}$;
   (b) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{z}}$;
   (c) $f(z) = \frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$.

4. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$ a spočtěte v nich reziduum, jestliže
   (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$;
   (b) $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$;
   (c) $f(z) = \frac{z+1}{1-e^{2\pi i z}}$;
   (d) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$.

5. Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^5}$ na prstencovém okolí bodu 0 a určete $\operatorname{res}_0 f(z)$.

6. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1}{z^8 - 4z^6}.$$
   (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.
   (b) Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$.
   (c) Vypočtěte rezidua ve všech izolovaných singularitách.

7. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)^2}.$$
   (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.
   (b) Klasifikujte všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkcí
$$g(z) = \frac{1}{z^{20}} f(z) \qquad \text{a} \qquad h(z) = \frac{1}{z^{20}} + f(z).$$
   Dále nalezněte reziduum funkcí $g(z)$ a $h(z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Výsledky

1. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$ pro $0 < |z-1| < 1$.
   (b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3}$ pro $|z| > 1$.

2. $f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{z^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ pro $1 < |z| < 3$.

3. (a) $-i$ je jednoduchý pól, i je dvojnásobný pól;
   (b) $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, jsou póly řádu 2;
   (c) 0 pětinásobný pól, 3 jednoduchý pól a $2k\pi \pm i \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly.

4. (a) 0 je pól řadu 2, π je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = \operatorname{res}_\pi f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$;
   (b) 0 je pól řadu 2, -2 a 1 jsou póly řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{res}_{-2} f(z) = \frac{1}{12}$ a $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{2}{3}$;
   (c) $z = -1$ je odstranitelná singularita, $z = k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je pól řádu 1, $\operatorname{res}_{-1} f(z) = 0$ a $\operatorname{res}_k f(z) = \frac{k+1}{-2\pi i}$;
   (d) $z = 0$ je pól řádu 2, $z = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$ a $\operatorname{res}_{k\pi} f(z) = \frac{(-1)^k}{k\pi}$.

5. Hlavní část je $\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}$; $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$.

6. (a) $f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} -\frac{z^{2n}}{4^{n+4}}$ pro $0 < |z| < 2$.
   (b) 0 je pól řádu 6 a ± 2 jsou póly řádu 1.
   (c) $\operatorname{res}_{-2} f(z) = -\frac{1}{2^8}$, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$, $\operatorname{res}_2 f(z) = \frac{1}{2^8}$.

7. (a) $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)z^n$ pro $0 < |z| < 1$.
   (b) Funkce g má v 0 pól řádu 21 a v 1 pól řádu 2, funkce h má v 0 pól řádu 20 a v 1 pól řádu 2, $\operatorname{res}_0 g(z) = 41$ a $\operatorname{res}_0 h(z) = 1$.