

Fourierova transformace

Zadání

1. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

- (a) $f(t) = e^{-|t|}$;
- (b) $f(t) = te^{-(t+5)^2}$;
- (c) $f(t) = \frac{1}{(1-it)^2}$.

2. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 5}.$$

- (a) Nalezněte $\hat{f}(\omega)$.
 - (b) Nalezněte inverzní Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
 - (c) Nalezněte $\hat{g}(\omega)$, kde $g(t) = f'(t) \sin t + f(-4t + 3)$.
3. Je dána funkce $f(t) = t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$.
- (a) Stanovte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
 - (b) Stanovte inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(2t + 1)$.
 - (c) Pomocí bodu (a) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce $h(t)$, která je zúžením funkce $f(t)$ na interval $[0, 1]$.
4. Jsou dány funkce $f(t) = \mathbf{1}(t + 1) - \mathbf{1}(t - 1)$ a $g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$.
- (a) Vypočtete $h(t) = (f * g)(t)$.
 - (b) Vypočtete Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f * g)(t)$.
 - (c) Pomocí bodu (b) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce, která je zúžením funkce $h(t) = (f * g)(t)$ na interval $[-1, 2]$.

5. Je dána funkce $f(t) = e^{-at}\mathbf{1}(t)$, kde $a > 0$.

- (a) Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t)$.
- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f_1 * f_2)(t)$, kde $f_1(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ a $f_2(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$.
- (c) Nalezněte funkci $h(t)$.

6. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

7. Pomocí Fourierovy transformace řešte (integrální) rovnici

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau = e^{-t^2}.$$

Výsledky

1. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$;
(b) $\hat{f}(\omega) = i\sqrt{\pi}(5i - \frac{\omega}{2})e^{5i\omega}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$;
(c) $\hat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^{-\omega}\mathbf{1}(\omega)$.
2. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}e^{-i\omega}$.
(b) $\check{f}(\omega) = \frac{1}{4}e^{-2|\omega|}e^{i\omega}$.
(c) $\hat{g}(\omega) = \frac{\omega-1}{2}\hat{f}(\omega-1) - \frac{\omega+1}{2}\hat{f}(\omega+1) + \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\omega}{4}}\hat{f}(-\frac{\omega}{4})$.
3. (a) $\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega}(\frac{i}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}) - \frac{1}{\omega^2}$ pro $\omega \neq 0$; $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$.
(b) $\check{g}(\omega) = \frac{i}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}e^{-i\frac{\omega}{2}}$ pro $\omega \neq 0$; $\check{g}(0) = \frac{1}{8\pi}$.
(c) $c_0 = \frac{1}{2}$ a $c_n = \frac{i}{2\pi n}$ pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
4. (a) $h(t) = 0$ pro $t \in (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$, $h(t) = t+1$ pro $t \in [-1, 0)$, $h(t) = 1$ pro $t \in [0, 1)$ a $h(t) = 2-t$ pro $t \in [1, 2)$.
(b) $\hat{h}(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} \frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}$ pro $\omega \neq 0$ a $\hat{h}(0) = 2$ pro $\omega = 0$.
(c) $c_n = \frac{1}{3}\hat{h}(\frac{2\pi n}{3})$.
5. (a) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.
(b) $\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{(\omega-i)(\omega-2i)}$.
(c) $h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\mathbf{1}(t)$.
6. $y(t) = -\frac{t}{2}e^{-t}\mathbf{1}(t) - \frac{1}{4}e^{-|t|}$.
7. $\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2t^2}$.