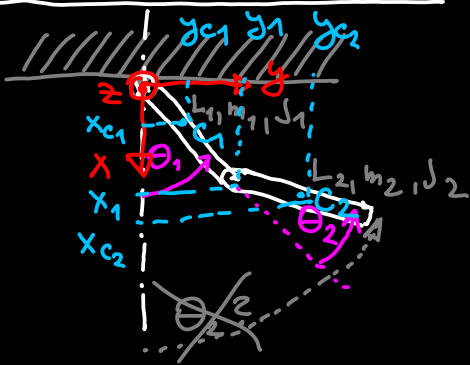


MODELOVÁNÍ VÍCE TĚLESOVÝCH MECH. SYSTÉMŮ POMOCÍ LAGR. ROVNICE

- Postup: 1. zvolím zobecněné souřadnice $\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$
2. vyjádřím kin. a pot. energii pomocí q a $\dot{q}$
- 2b. případně i dis. fce $\mathcal{D}(q)$ a zob. síly Q
3. vytvořím Lagr. fci $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}^*(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q)$
4. dosadím $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ do $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_i} + Q_i$, $i=1, \dots, n$

JEDNODUCHÉ! JEDNODUCHÉ?

Př.: dvojité kyvadlo



zob. souř.: θ_1, θ_2

transl. i rotační rychl. obvy fce $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$

jediný (globální) souř. systém
pozice těžišť c_1 a c_2 :

$$x_{c1} = \frac{L_1}{2} \cdot \cos \theta_1$$

$$y_{c1} = \frac{L_1}{2} \cdot \sin \theta_1$$

$$\Downarrow d/dt$$

$$\dot{x}_{c1} = -\frac{L_1}{2} \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$\dot{y}_{c1} = \frac{L_1}{2} \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

$$\Downarrow$$

$$|v_{c1}|^2 = \dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2 = \frac{L_1^2}{4} \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$x_{c2} = x_1 + \frac{L_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= L_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_{c2} = y_1 + \frac{L_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Downarrow d/dt$$

$$\dot{x}_{c2} = \dots$$

$$\dot{y}_{c2} = \dots$$

$$\Downarrow$$

$$|v_{c2}|^2 = \dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2$$

$$\mathcal{T}_{1t}^*(\dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} m_1 \frac{L_1^2}{4} \cdot \dot{\theta}_1^2$$

$$\mathcal{T}_{2t}^*(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^2 = \dots$$

$$\mathcal{T}_{2R}^*(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2$$

$$\mathcal{T}_1^* = \mathcal{T}_{1t}^* + \mathcal{T}_{1R}^*$$

$$\mathcal{T}_2^* = \mathcal{T}_{2t}^* + \mathcal{T}_{2R}^*$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_1^* + \mathcal{T}_2^*$$

Potenciální energie:

$$\mathcal{V}_1(\theta_1) = -m_1 g \cdot x_{c1}$$

$$= -m_1 g \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \cos \theta_1$$

$$\mathcal{V}_2(\theta_1, \theta_2) = -m_2 g \cdot x_{c2}$$

$$= \dots$$

$$\text{Lagr. fce: } \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \mathcal{T}^* - \mathcal{V}$$

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{V}_1(\theta_1) + \mathcal{V}_2(\theta_1, \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta_2} \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = 0$$

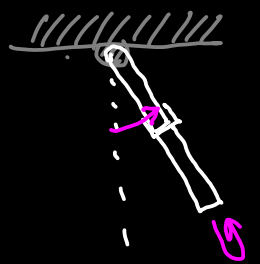
JEDNODUCHÉ

JEDNODUCHÉ?

RYCHLOSTI (v, ω)

TĚLES JSOU

VEKTORY!



ω je vektor $\Rightarrow$ moment setrvačnosti je matice: $\mathcal{T}_{2R}^* = \frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2$

→ můžeme absolutní (inerciální) rychlosti skládat
z relativních (sčítací vektorů)

→ pro výpočty: reprezentace vektoru v nějakém
souřadném systému → pro každé těleso jeho vlastní
souřadný systém.

↓
místo pohybu těles souřadných systémů. pohyby (rychlosti)