Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno a příjmení: .... Podpis: ....

Příklad	1.	2.	3.	4.	$\sum$
Body					

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k funkce $f(z)$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}$.
- Pro $a > 0$ je $\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathscr{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ a $\mathscr{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\alpha^n](z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathscr{Z}[\sin(\alpha n)](z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$ a $\mathscr{Z}[\cos(\alpha n)](z) = \frac{z^2 - z\cos\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$.
- $\mathscr{Z}[n](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Zadání A

1. [10 bodů] Vypočtěte integrál

$$\int_C ze^z + \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z$$

   kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

2. [15 bodů] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)^2}.$$

   (a) Nalezněte Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 2. Dále určete mezikruží konvergence této řady.

   (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = \frac{1}{(z-2)^{50}} f(z)$ a nalezněte $\operatorname{res}_2 g(z)$.

3. [15 bodů] Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\mathbf{1}(\tau) y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = e^{-2|t|}.$$

   (Nápověda: $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\mathbf{1}(t)\right](\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ a $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.)

4. [10 bodů] Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \frac{n-3^n}{n!}.$$

   (a) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (b) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(a_{n+2})_{n=0}^{\infty}$.

Zadání B

1. [15 bodů] Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} - \frac{\sin z}{z^4}.$$
   (a) Určete hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu 0.
   (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + \frac{1}{1+e^{iz}}$.
   (c) Vypočtěte $\operatorname{res}_0 g(z)$, kde $g(z)$ je funkce z bodu (b).

2. [10 bodů] Vypočtěte
$$\int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z,$$
   kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$.

3. [15 bodů] Je dána funkce
$$f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-2).$$
   (a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
   (b) Z definice konvoluce vypočtěte $(f * f)(t)$.
   (c) Nalezněte komplexní Fourierovy koeficienty zúžení funkce $f(t)$ na interval $[-2, 2]$.

4. [10 bodů] Je dána funkce
$$F(z) = \frac{4}{z^2+2z-3}.$$
   (a) Rozložte funkci $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí bodu ∞.
   (b) Využitím výsledku z bodu (a) určete inverzní Z-transformaci funkce $F(z)$.

Zadání C

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$u(x, y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

   (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Pro všechny kladné hodnoty parametru α z bodu (a) nalezněte všechny funkce $v(x, y)$ tak, aby $u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$.

2. [10 bodů] Nalezněte rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-3)^2}$$

do mocninné řady na okolí bodu -1. Dále určete poloměr konvergence této řady.

3. [15 bodů] Spojitá funkce $f(t)$ z $L^1(\mathbb{R})$ má Fourierovu transformaci

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

   (a) Nalezněte funkci $f(t)$.

   (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(t+1)\cos(2t)$.

4. [15 bodů] Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y'(t) - 3\int_0^t e^{-2\tau} y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -4e^{-3t}$$

splňující $y(0) = 1$.

Zadání D

1. [15 bodů] Je dána funkce
$$u(x, y) = e^{-\alpha x} \sin(2y) + \beta y,$$
kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
   (a) Určete všechny hodnoty parametrů α a β, pro které je funkce $u(x, y)$ harmonická na $\mathbb{R}^2$.
   (b) Nalezněte kladnou hodnotu parametru α, parametr β a funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f(i\pi) = 2$.

2. [10 bodů] Vypočtěte
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} \, \mathrm{d}x.$$

3. [15 bodů] Je dána funkce
$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi), \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$
   (a) Zapište $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.
   (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$.
   (c) Nalezněte Laplaceovu transformaci periodické funkce $g(t)$, která má periodu $T = 2\pi$ a na intervalu $[0, 2\pi)$ je dána předpisem $g(t) = f(t)$.

4. [10 bodů] Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je
$$F(z) = \ln\left(1 + \frac{9}{z^2}\right).$$
   (a) Pomocí rozvoje do Laurentovy řady nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
   (b) Nalezněte prvních pět členů posloupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_0 = b_1 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ je $b_n = 0$.
   (c) Nalezněte Z-transformaci posloupnosti $(na_n)_{n=0}^{\infty}$.

Zadání E

1. [10 bodů] Vypočtěte
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. [15 bodů] Nalezněte součet mocninné řady
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2}$$
a určete její poloměr konvergence.

3. [10 bodů] Je dána funkce
$$f(t) = (t-3)e^{-t^2}.$$
   (a) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.
   (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $(f * f')(t)$.
   (c) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(3t+4)e^{it}$.

4. [15 bodů] Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice
$$y''(t) + y(t) = t - (t-1)\mathbf{1}(t-1)$$
splňující $y(0) = y'(0) = 0$.

Zadání F

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$u(x, y) = x^3y - xy^3 + 6xy - 3y.$$

   (a) Ověřte, že $u(x, y)$ je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f(1 + i) = 3 + 5i$.

2. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{3}{z^{12} + 4z^{10}}.$$

   (a) Určete rozvoj funkce $f(z)$ do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu 0.

   (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$.

   (c) Vypočtěte $\operatorname{res}_0 \left[\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z)\right]$.

3. [15 bodů] Nalezněte inverzní Laplaceovu transformaci funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^4 + 4} + \frac{e^{-3s}}{s + 1}.$$

4. [15 bodů] Pomocí Z-transformace nalezněte řešení rovnice

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = n$$

   splňující $y_0 = y_1 = 0$.

Řešení

Zadání A

1. Z Cauchyovy věty plyne, že $\int_C ze^z \, \mathrm{d}z = 0$. Parametrizace kladně orientované kružnice o rovnici $|z| = 2$ je $\varphi(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Z definice křivkového integrálu máme

$$\int_C \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{e^{it}} - 2e^{-it}\right) 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2i\,\mathrm{d}t = 4\pi i.$$

   Odtud $\int_C ze^z + \frac{3|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z = 4\pi i$.

2. (a) Jednoduchou úpravou dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{z-1}{z} = \frac{1}{(z-2)^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

   Rozvoj členu $\frac{1}{z}$ do mocninné řady se středem 2 je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n$$

   pro $|z-2| < 2$. Nyní dáme dohromady výše uvedené vztahy, čímž obdržíme rozvoj $f(z)$ do Laurentovy řady ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-2} \quad \text{pro } 0 < |z-2| < 2.$$

   Mezikruží konvergence je určeno nerovnostmi $0 < |z-2| < 2$.

   (b) Funkce $g(z)$ je podílem dvou celistvých funkcí. Čitatel $z-1$ má v bodech 0 a 2 kořeny násobnosti 0. Jmenovatel $z(z-2)^{52}$ má v bodě 0 kořen násobnosti 1 a v bodě 2 kořen násobnosti 52. Proto má funkce g v bodě 0 jednoduchý pól a v bodě 2 má pól řádu 52.

   Díky (a) je

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^{52}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-52}$$

   pro $0 < |z-2| < 2$. Koeficient u $(z-2)^{-1}$ v tomto rozvoji je hledané reziduum. Proto $\operatorname{res}_2 g(z) = \frac{1}{2^{52}}$.

3. Integrál na levé straně rovnice je konvoluce funkcí $e^{-|t|}\mathbf{1}(t)$ a $y(t)$. Aplikací Fourierovy transformace na zadanou rovnici obdržíme

$$\hat{y}(\omega) + \frac{1}{1+i\omega}\hat{y}(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}.$$

   Z tohoto vztahu si vyjádříme obraz $\hat{y}(\omega)$ hledaného řešení $y(t)$. V našem případě máme

$$\hat{y}(\omega) = \frac{4(\omega - i)}{(\omega-2i)^2(\omega+2i)}.$$

Využitím inverzní Fourierovy transformace dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Integrál z inverzní Fourierovy transformace vypočteme metodou reziduí. Označme

$$h(z) = \frac{4(z-i)e^{izt}}{(z-2i)^2(z+2i)}.$$

Tato funkce je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-2i, 2i\}$. V bodě $-2i$ má pól řádu 1 a v bodě $2i$ má pól řádu 2. Proto

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{-2i} h(z) &= \lim_{z\to -2i} \frac{4(z-i)e^{izt}}{(z-2i)^2} = \frac{3i}{4}e^{2t},\\
\operatorname{res}_{2i} h(z) &= \lim_{z\to 2i} \left[\frac{4(z-i)e^{izt}}{z+2i}\right]' = -i\frac{3-4t}{4}e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Odtud

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} -i\operatorname{res}_{-2i} h(z) = \frac{3}{4}e^{2t} & \text{pro } t<0,\\ i\operatorname{res}_{2i} h(z) = \left(\frac{3}{4}-t\right)e^{-2t} & \text{pro } t\geq 0.\end{cases}$$

Celkem tak máme

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-2|t|} - te^{-2t}\mathbf{1}(t).$$

4. (a) Díky základním vlastnostem Z-transformace máme

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) &= \mathscr{Z}\left[\frac{n}{n!}\right](z) - \mathscr{Z}\left[\frac{3^n}{n!}\right](z)\\
&= -z\left(\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z)\right)' - \mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} - e^{\frac{3}{z}}.
\end{aligned}$$

(b) Podle věty O obrazu posunutí je

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+2}\right](z) = z^2\left(\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right) = ze^{\frac{1}{z}} - z^2e^{\frac{3}{z}} + z^2 + 2z.$$

Zadání B

1. (a) Využijeme-li známé rozvoje funkcí sinus a kosinus do mocninné řady se středem v bodě 0, dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)-\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \\ &= \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{4!}z^4+\dots\right)-\frac{1}{z^4}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\dots\right) \\ &= -\frac{1}{z^3}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z}-\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right)z+\dots=-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z}-\frac{1}{20}z+\dots. \end{aligned}$$

Hlavní část Laurentovy řady funkce f na $P(0)$ proto je

$$-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{z}.$$

(b) Protože $\frac{1}{1+e^{iz}}$ je holomorfní na okolí 0, vidíme z výsledku v (a), že 0 je pól řádu 3 funkce g. Další singularity funkce $g(z)$ už mohou pocházet pouze od členu $\frac{1}{1+e^{iz}}$, neboť $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Hledejme tedy, kdy $1+e^{iz}=0$. Z vlastností exponenciální funkce víme, že $e^{iz}=-1$ právě tehdy, když $z=(2k+1)\pi$ pro nějaké $k\in\mathbb{Z}$. Protože

$$(1+e^{iz})'|_{z=(2k+1)\pi}=ie^{i(2k+1)\pi}=-i\neq 0,$$

jsou body $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, jednoduché póly funkce g.

(c) Z definice rezidua a z (a) plyne, že $\operatorname{res}_0 g(z)=\frac{2}{3}$.

2. Integrand má izolované singularity v bodech $k\in\mathbb{Z}$. Z těchto bodů leží uvnitř kružnice C jen 0 a 1 (všechny ostatní leží vně C). Z Reziduové věty proto máme

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\left(\operatorname{res}_0\frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}+\operatorname{res}_1\frac{z+3}{(z+6)\sin(\pi z)}\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{3}{6}\frac{1}{\pi\cos 0}+\frac{4}{7}\frac{1}{\pi\cos\pi}\right)=-\frac{i}{7}. \end{aligned}$$

3. (a) Z definice Fourierovy transformace plyne, že

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-1}^{2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{i\omega}-e^{-2i\omega}}{i\omega}$$

pro $\omega\neq 0$. Ze spojitosti funkce $\hat{f}$ dostaneme $\hat{f}(0)=3$.

(b)

$$\begin{aligned} (f*f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-1}^{2}\mathbf{1}(t-\tau+1)-\mathbf{1}(t-\tau-2)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{t-2}^{t+1}\mathbf{1}(u+1)-\mathbf{1}(u-2)\,\mathrm{d}u \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pro } t\in(-\infty,-2)\cup(4,\infty); \\ t+2 & \text{pro } t\in[-2,1); \\ 4-t & \text{pro } t\in[1,4]. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Fourierovy koeficienty zúžení funkce f na interval $[-2,2]$ jsou

$$c_n = \frac{1}{4}\hat{f}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{4}\frac{e^{i\frac{\pi n}{2}} - e^{-2i\frac{\pi n}{2}}}{i\frac{\pi n}{2}} = \frac{i^n - (-1)^n}{2i\pi n}, & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$

4. (a) Rozkladem na parciální zlomky obdržíme

$$F(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}.$$

Nyní musíme každý z parciálních zlomků rozvinout na okolí nekonečna. Tedy

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 1$ a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > 3$. Rozvoj funkce $F(z)$ do Laurentovy řady na okolí nekonečna tak je

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}3^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 3^{n-1}}{z^n} \end{aligned}$$

pro $|z| > 3$.

(b) Z (a) plyne, že

$$\begin{aligned} &\mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 0, \\ &\mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = 1 + (-1)^n 3^{n-1}, \text{ pro } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zadání C

1. (a) Přímočarým výpočtem zjistíme, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha^2 e^y \sin(\alpha x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin(\alpha x).$$

Tedy $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $1 - \alpha^2 = 0$ nebo $\alpha = 0$. Funkce u je proto harmonická na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

(b) Ať $\alpha = 1$. Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x + 3y + 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y \sin x - 3x.$$

Integrací první podmínky dostaneme

$$v(x, y) = e^y \cos x + \frac{3}{2} y^2 + y + C(x),$$

kde $C(x)$ je zatím neurčená reálná funkce proměnné x. Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x) = -3x$. Tedy $C(x) = -\frac{3}{2}x^2 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Proto

$$v(x, y) = e^y \cos x + \frac{3}{2} y^2 + y - \frac{3}{2} x^2 + K, \text{ kde } K \in \mathbb{R}.$$

2. Protože

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z+1}{4}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}} (z+1)^{n-1}$$

pro $|z + 1| < 4$, je

$$f(z) = (z+1)\frac{1}{(z-3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}} (z+1)^n$$

pro $|z + 1| < 4$. Poloměr konvergence je 4.

3. (a) Hledaný funkce $f(t)$ je inverzní Fourierovou transformací funkce $\hat{f}(\omega)$, tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega$$

K výpočtu integrálu využijeme metodu reziduí. Položme

$$h(z) = \frac{z e^{izt}}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{z e^{izt}}{(z^2+4)(z^2+1)}.$$

Funkce $h(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{-2i,-i,i,2i\}$ a v bodech $\pm i, \pm 2i$ má jednoduché póly. Pro $t \geq 0$ tak máme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left[\operatorname{res}_i h(z) + \operatorname{res}_{2i} h(z)\right] = \frac{i}{6}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right).$$

Pro $t < 0$ je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(-2\pi i\right)\left[\operatorname{res}_{-i} h(z) + \operatorname{res}_{-2i} h(z)\right] = -\frac{i}{6}\left(e^{t} - e^{2t}\right).$$

Odtud

$$f(t) = \frac{i}{6}\left(e^{-|t|} - e^{-2|t|}\right)\operatorname{sgn} t,\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Využitím základních vlastností Fourierovy transformace obdržíme

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \mathscr{F}\left[f(t+1)\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right](\omega) \\
&= \frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t+1)\right](\omega-2) + \frac{1}{2}\mathscr{F}\left[f(t+1)\right](\omega+2) \\
&= \frac{1}{2}e^{i(\omega-2)}\hat{f}(\omega-2) + \frac{1}{2}e^{i(\omega+2)}\hat{f}(\omega+2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\omega-2)e^{i(\omega-2)}}{(\omega-2)^4+5(\omega-2)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{(\omega+2)e^{i(\omega+2)}}{(\omega+2)^4+5(\omega+2)^2+4}.
\end{aligned}$$

4. Aplikací Laplaceovy transformace dostaneme

$$sY(s) - 1 - \frac{3}{s+2}Y(s) = -\frac{4}{s+3}.$$

Odtud si vyjádříme Laplaceův obraz řešení. Dostáváme tak

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+3)^2}.$$

Protože $Y(s)$ má v bodě -3 dvojnásobný pól, je

$$\begin{aligned}
y(t) &= \operatorname{res}_{-3} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to-3}\left[(s+2)e^{st}\right]' = \lim_{s\to-3} e^{st} + t(s+2)e^{st} \\
&= (1-t)e^{-3t},\ t \geq 0.
\end{aligned}$$

Zadání D

1. (a) Přímočarým výpočtem zjistíme, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x} \sin(2y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4 e^{-\alpha x} \sin(2y).$$

Tedy $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha^2 - 4 = 0$ a $\beta \in \mathbb{R}$. Proto u je harmonická na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha \in \{-2, 2\}$ a $\beta \in \mathbb{R}$.

(b) Z rovnosti $f(i\pi) = 2$ plyne, že $\beta = \frac{2}{\pi}$. Díky (a) víme, že $\alpha = 2$ je jediná kladná hodnota parametru α, pro kterou může být u reálnou částí holomorfní funkce. Pro tyto hodnoty parametrů dostaneme Cauchyovy-Riemannovy podmínky ve tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-2x} \sin(2y),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-2x} \cos(2y) - \frac{2}{\pi}.$$

Integrací první podmínky máme $v(x, y) = e^{-2x} \cos(2y) + C(x)$. Dosazením do druhé podmínky dostaneme $C'(x) = -\frac{2}{\pi}$. Tedy $C(x) = -\frac{2}{\pi}x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Z $f(i\pi) = 2$ plyne, že $v(0, \pi) = 0$, a proto $K = -1$. Celkem tak máme

$$v(x, y) = e^{-2x} \cos(2y) - \frac{2}{\pi}x - 1.$$

2. Nejdříve vypočteme metodou reziduí integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} \, \mathrm{d}x.$$

Ať

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 6z + 10}.$$

Funkce $g(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{3 - i, 3 + i\}$ a má v bodech $3 \pm i$ jednoduché póly. Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_{3+i} g(z) = \pi e^{i(3+i)} = \frac{\pi}{e}(\cos 3 + i \sin 3).$$

Díky tomu je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 6x + 10} \, \mathrm{d}x = \operatorname{Im} I = \frac{\pi}{e} \sin 3.$$

3. (a)

$$f(t) = (\cos t) \left(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi) \right), \ t \in [0, \infty).$$

(b) Využijeme-li znalost Laplaceova obrazu funkce kosinus, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) &= \frac{s}{s^2+1} - \mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-\pi)\cos t\right](s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\mathscr{L}\left[\cos t\right](s) \\ &= \frac{s\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s^2+1}.\end{aligned}$$

(c) Z (b) a věty O Laplaceově transformaci periodické funkce máme

$$\mathscr{L}\left[g(t)\right](s) = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)}{1-e^{-2\pi s}} = \frac{s\left(1+e^{-\pi s}\right)}{\left(1-e^{-2\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}.$$

4. (a) Protože $\ln(1+\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\zeta^n$ pro $|\zeta| < 1$, je

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{9^n}{z^{2n}}$$

pro $|z| > 3$. Odtud $a_0 = a_{2n+1} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} 9^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(b) Využitím výsledku z (a) a definice konvoluce dostaneme, že $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 9$ a $c_4 = -\frac{81}{2}$.

(c) Z věty o derivaci obrazu plyne

$$\mathscr{Z}\left[na_n\right](z) = -zF'(z) = \frac{18}{z^2+9}.$$

Zadání E

1. Ať $f(z) = \frac{2-z}{(z^2-4z+5)^2}$. Funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{2-i, 2+i\}$. V bodech $2 \pm i$ má funkce $f(z)$ póly řádu 2. Protože jen pól $2+i$ leží v horní polorovině, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-x}{(x^2-4x+5)^2} \,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{res}_{2+i} f(z) = 2\pi i \lim_{z \to 2+i} \left[\frac{2-x}{(x-2+i)^2} \right]'$$
$$= 2\pi i \lim_{z \to 2+i} \frac{-(x-2+i)^2 - 2(2-x)(x-2+i)}{(x-2+i)^4} = 0.$$

2. Derivace zadané řady je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = z \cos z, \ z \in \mathbb{C}.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = \int z \cos z \,\mathrm{d}z = z \sin z + \cos z + C$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, kde $C \in \mathbb{C}$. Dosadíme-li $z = 0$, obdržíme $C = -1$. Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+2)} z^{2n+2} = z \sin z + \cos z - 1$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Poloměr konvergence je ∞.

3. (a) Ze základních vlastností Fourierovy transformace a ze znalosti obrazu funkce e^{-t^2} plyne, že

$$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\left[te^{-t^2}\right](\omega) - 3\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega) = i\left(\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega)\right)' - 3\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega)$$
$$= -\sqrt{\pi}\left(\frac{i\omega}{2} + 3\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

(b) Zkombinujeme-li znalosti o obrazu konvoluce a derivace, dostaneme

$$\mathscr{F}\left[(f * f')(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega) i\omega \hat{f}(\omega) = \pi i\omega \left(\frac{i\omega}{2} + 3\right)^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

(c) Použitím základních vlastností Fourierovy transformace obdržíme

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \mathscr{F}\left[f(3t+4)e^{it}\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(3t+4)\right](\omega - 1) \\ &= \frac{1}{3}\mathscr{F}\left[f(t+4)\right]\left(\frac{\omega-1}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{\frac{4i}{3}(\omega-1)} \hat{f}\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \\ &= -\sqrt{\pi}\left(\frac{i(\omega-1)}{18} + 1\right) e^{\frac{4i}{3}(\omega-1)} e^{-\frac{(\omega-1)^2}{36}}. \end{aligned}$$

4. Aplikací Laplaceovy transformace obdržíme

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Odtud je

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

Nejdříve nalezneme vzor k prvnímu členu. Ať $g(t)$ je Laplaceův vzor k funkci $G(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$. Pak

$$\begin{aligned}
g(t) &= \operatorname{res}_{-i} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_i G(s)e^{st} + \operatorname{res}_0 G(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to -i} \frac{e^{st}}{s^2(s-i)} + \lim_{s\to i} \frac{e^{st}}{s^2(s+i)} + \lim_{s\to 0} \left(\frac{e^{st}}{s^2+1}\right)' \\
&= \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it}}{-2i} + \lim_{s\to 0} \frac{te^{st}(s^2+1) - 2se^{st}}{(s^2+1)^2} = t - \sin t.
\end{aligned}$$

Zbývá nalézt vzor k druhému členu z vyjádření funkce $Y(s)$, tj. k členu $e^{-s}G(s)$. Využitím znalosti obrazu posunuté funkce máme

$$e^{-s}G(s) = e^{-s}\mathscr{L}\left[g(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[g(t-1)\mathbf{1}(t-1)\right](s).$$

Odtud plyne, že hledané řešení je

$$y(t) = g(t) - g(t-1)\mathbf{1}(t-1) = t - \sin t - \left[t - 1 - \sin(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1),\ t \geq 0.$$

Zadání F

1. (a) Protože $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, je u harmonická na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2y - y^3 + 6y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -x^3 + 3xy^2 - 6x + 3.$$

   Z první podmínky plyne, že

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + 3y^2 + C(x).$$

   Dosazením do druhé podmínky obdržíme $C'(x) = -x^3 - 6x + 3$. Proto

$$C(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + K,$$

   kde $K \in \mathbb{R}$. Navíc požadovaná rovnost $f(1+i) = 3+5i$ implikuje $v(1,1) = 5$. Odtud $K = 1$. Tedy

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + 3y^2 - \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + 1.$$

2. (a) Protože $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$ pro $|\zeta| < 1$, je

$$f(z) = \frac{3}{4z^{10}} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{3}{4z^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} z^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-10}, \ 0 < |z| < 2.$$

   (b) Protože

$$f(z) = \frac{3}{z^{10}(z^2+4)},$$

   je $f(z)$ holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, -2i, 2i\}$. V bodech $\pm 2i$ má jednoduché póly a v bodě 0 má pól řádu 10.

   (c) Díky (a) je

$$\frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z) = \frac{1}{z^{10}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} z^{2n-19} = \frac{3}{4}\frac{1}{z^{19}} + \cdots + \frac{3}{4^9}\frac{1}{z^3} - \frac{3}{4^{10}}\frac{1}{z} + \frac{3}{4^{11}} z + \ldots$$

   pro $0 < |z| < 2$. Proto

$$\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^9} f(z) = -\frac{3}{4^{10}}.$$

3. Všechny řešení rovnice $s^4+4=0$ jsou $s_1=1+i$, $s_2=-1+i$, $s_3=1-i$ a $s_4=-1-i$. Proto má funkce $\frac{1}{s^4+4}$ jednoduché póly v bodech s_1, s_2, s_3 a s_4. Díky tomu je

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4+4}\right](t) &= \sum_{k=1}^{4} \operatorname{res}_{s_k} \frac{e^{st}}{s^4+4} = \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{s_k t}}{4s_k^3} \\
&= \frac{e^{(1+i)t}}{8i(1+i)} + \frac{e^{(1-i)t}}{-8i(1-i)} + \frac{e^{(-1+i)t}}{-8i(-1+i)} + \frac{e^{(-1-i)t}}{8i(-1-i)} \\
&= \frac{e^t}{8}\left[-\frac{e^{it}(1+i)}{2} - \frac{e^{-it}(1-i)}{2}\right] \\
&\quad + \frac{e^{-t}}{8}\left[-\frac{e^{it}(-1+i)}{2} - \frac{e^{-it}(-1-i)}{2}\right] \\
&= \frac{e^t}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8}(\sin t + \cos t)\,.
\end{aligned}$$

Navíc

$$\frac{e^{-3s}}{s+1} = e^{-3s}\mathscr{L}\left[e^{-t}\right](s) = \mathscr{L}\left[e^{-(t-3)}\mathbf{1}(t-3)\right](s)\,.$$

Odtud

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t) = \frac{e^t}{8}(\sin t - \cos t) + \frac{e^{-t}}{8}(\sin t + \cos t) + e^{-(t-3)}\mathbf{1}(t-3).$$

4. Aplikací Z-transformace dostaneme

$$z^2Y(z) - zY(z) - 6Y(z) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)'.$$

Tedy

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-3)(z+2)}.$$

Funkce $Y(z)z^{n-1}$ má v bodě 1 pól řádu 2 a v bodech -2 a 3 má jednoduché póly pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Pro $n=0$ má ještě funkce $Y(z)z^{n-1}$ v nule odstranitelnou singularitu. Proto

$$y_n = \operatorname{res}_{-2} Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_1 Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_3 Y(z)z^{n-1} = -\frac{n}{6} - \frac{1}{36} + \frac{3^n}{20} - \frac{(-2)^n}{45}$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. (Pro $n=0$ vzorec platí, neboť $z^{-1}Y(z)$ má v 0 pouze odstranitelnou singularitu, která do součtu reziduí nepřispěje.)