Komplexní analýza

Úvod

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Základní informace

Stránky předmětu:
https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01KAN

Obsah kurzu:

1. Komplexní analýza
2. Fourierovy řady a Fourierova transformace
3. Laplaceova transformace
4. Z-transformace

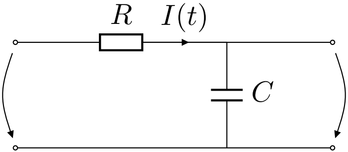
Kde lze potkat témata probíraná v kurzu?

- Matematika (výpočty integrálů, diferenciální rovnice, harmonická analýza, stochastické procesy,...)
- Fyzika (optika, kvantová teorie, statistická fyzika,...)
- Teorie obvodů
- Teorie signálů
- Zpracování obrazu
- Teorie řízení

$\vdots$

Motivace (RC filtr – dolní propust)

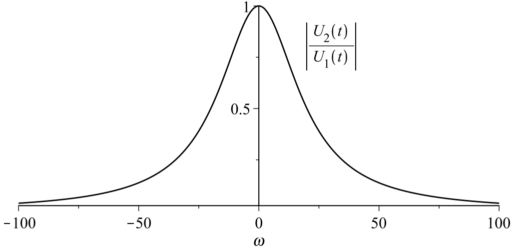
$U_1(t) = U_0 e^{i\omega t}$



$U_2(t) = Z_C I(t) = \frac{1}{i\omega C} I(t)$

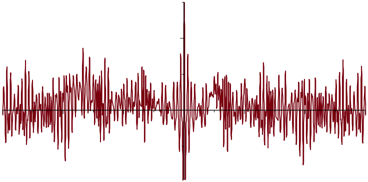
Tedy

$$\frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \Rightarrow \left|\frac{U_2(t)}{U_1(t)}\right| = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

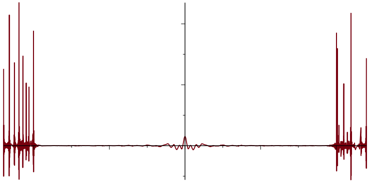


Motivace (Zpracování signálu)

Signál s (vysokofrekvenčním) šumem:

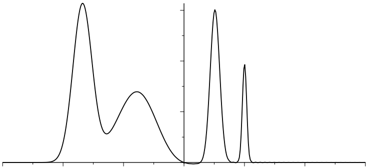


Reálná část frekvenčního spektra:

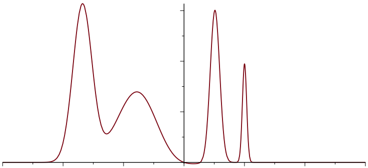


Motivace (Zpracování signálu – pokračování)

Odstraníme-li z frekvenčního spektra zašuměného signálu „vyšší frekvence“, dostaneme:



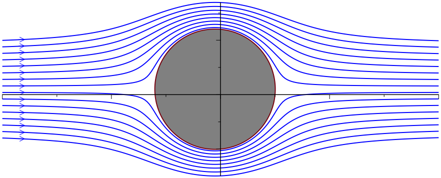
Pro porovnání uveďme výchozí signál bez šumu:



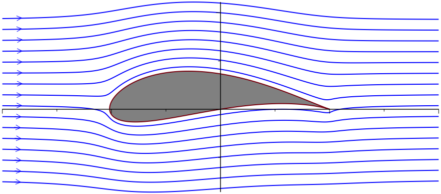
Motivace (obtékání profilu křídla)

Nevířivé proudění ideální tekutiny.

Obtékání kruhu, který má ve svém vnitřku bod -1 a na své hranici bod 1:



Využitím Žukovského funkce $f(z) = z + \frac{1}{z}$ dostaneme:



Motivace (řešení algebraických rovnic)

Uvažme rovnici

$$x^2 + 1 = 0.$$

- Tato rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel!
- Lze rozšířit reálná čísla tak, aby řešení existovalo?
- Pokud ano, jak vypadá číslo x splňující $x^2 = -1$?
- Jak je definováno násobení v tomto rozšíření reálných čísel?

Komplexní čísla

Definice

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ vybavenou operacemi

1. sčítání: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
2. násobení: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

Snadno ukážeme, že pro všechna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ platí:

- $z_1z_2 = z_2z_1$;
- $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Algebraický tvar komplexního čísla

- $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ a $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$. Reálná čísla chápeme jako speciální případ komplexních čísel (ztotožníme $(x, 0) \in \mathbb{C}$ s $x \in \mathbb{R}$).
- $(x_1, 0)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2)$.
- Prvek $(0, 1)$ se nazývá imaginární jednotka a označuje se symbolem i. Platí
$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$
- Protože $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, budeme psát
$$z = x + iy.$$

Terminologie a značení:

- $z = x + iy$... algebraický tvar komplexního čísla z.
- x... reálná část komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Re} z = x$.
- y... imaginární část komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Im} z = y$.

Komplexní sdružení a absolutní hodnota

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Komplexně sdruženým číslem k číslu z nazveme číslo $\bar{z} = x - iy$. Absolutní hodnotou (nebo také modulem) komplexního čísla z rozumíme číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$. Navíc $|z| = 0$ právě tehdy, když $z = 0$.
- Jak vypadá inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ k z vůči násobení? Inverzní prvek z^{-1} je definován rovností $z^{-1}z = 1$, a proto
  - pro $z = 0$ prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
  - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

  Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Příklad

Nechť $z = 5 - i$ a $w = 1 + 2i$. Potom $|z - w| = 5$, $\operatorname{Re} \frac{z}{w} = \frac{3}{5}$ a $\operatorname{Im} \frac{z}{w} = -\frac{11}{5}$.

Základní identity

Tvrzení (Základní identity)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. *Potom*

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, *kdykoli* $w \neq 0$;
5. $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *a* $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
6. $|z| = |\overline{z}|$;
7. $|zw| = |z|\,|w|$;
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, *kdykoli* $w \neq 0$.

Důkaz: Domácí cvičení. ■

Trojúhelníková nerovnost

Tvrzení

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. *Potom*

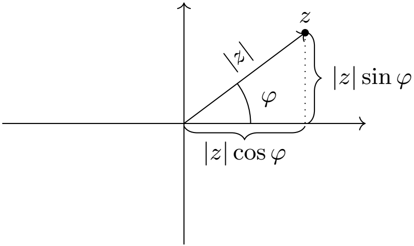
$$|z + w| \leq |z| + |w| \,.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Na $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání!

Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť z je nenulové komplexní číslo.



Z obrázku vidíme, že

$$z = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right).$$

Goniometrický tvar komplexního čísla

Pro $z \neq 0$ zavádíme následující terminologii a značení:

- $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$... goniometrický tvar komplexního čísla z.
- φ... argument komplexního čísla z.
- $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$... množina všech argumentů komplexního čísla z.
- $\varphi \in (\operatorname{Arg} z) \cap (-\pi, \pi]$ se nazývá hlavní hodnota argumentu komplexního čísla z a značí se $\arg z$.

Příklad

Ať $z = -1 + i$. Pak $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.

Hlavní hodnota argumentu komplexního čísla

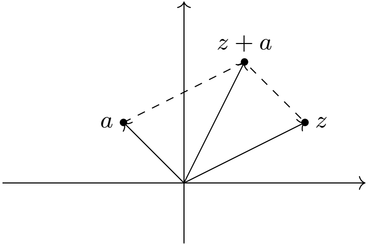
Tvrzení

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \textit{je-li } \operatorname{Re} z > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \textit{je-li } \operatorname{Im} z > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \textit{je-li } \operatorname{Im} z < 0; \\ \pi, & \textit{je-li } \operatorname{Im} z = 0 \textit{ a } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

Důkaz: Viz cvičení. ∎

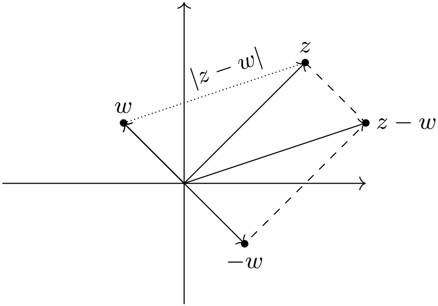
Geometrický význam sčítání

Posun v rovině o vektor $a \in \mathbb{C} \ldots z \mapsto z + a$.



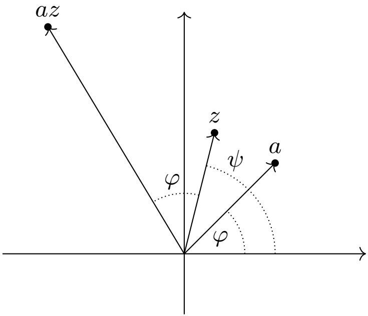
Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost bodů z a w je $|z - w|$.



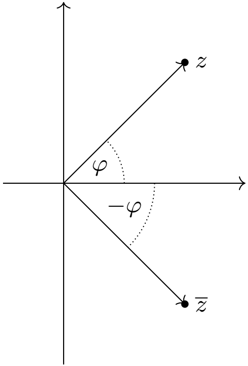
Geometrický význam násobení

Nechť $a, z \neq 0$.
Otočení o úhel $\arg a$ a poté stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$ ... $z \mapsto az$.



Geometrický význam komplexního sdružení

Zrcadlení kolem reálné osy . . . $z \mapsto \overline{z}$



Moivreova věta

Definujeme:

- $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -1$. Z Moivreovy věty plyne, že množina všech jejích řešení je

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k = 0, 1, 2, 3\right\}$$

Rozšířená komplexní rovina

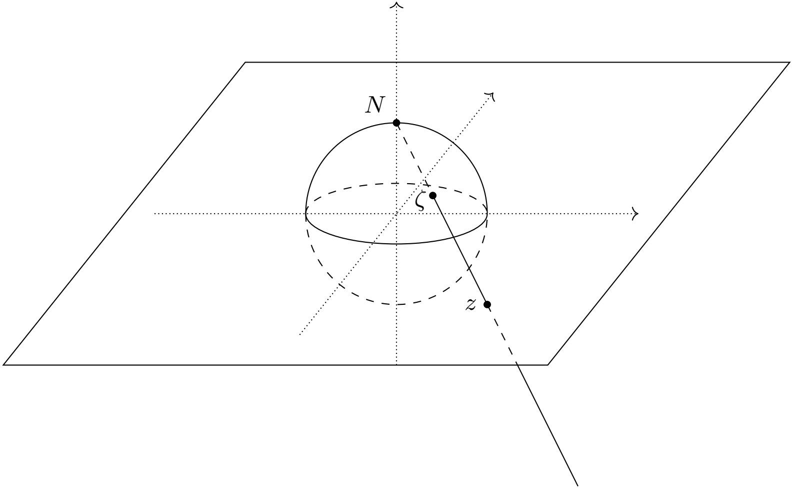
Množina $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se nazývá rozšířená komplexní rovina.
Definujeme:

- $z + \infty = \infty + z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$;
- $\frac{z}{\infty} = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $\frac{z}{0} = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$.

Nedefinujeme: $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Riemannova sféra

Riemannova sféra . . . sféra se středem v počátku a poloměrem 1.



Okolí bodu

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$.

- Množinu $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme okolí bodu z_0 poloměru ε.
- Množinu $P(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme prstencové okolí bodu z_0 poloměru ε.
- Množinu $U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > \varepsilon\}$ nazýváme okolí bodu ∞ poloměru ε.

Nebude-li nutné určit konkrétní velikost okolí, pak budeme stručněji psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$, $U(\infty)$.

Otevřené a uzavřené množiny

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$.

- Řekneme, že M je otevřená, jestliže pro každé $z \in M$ existuje $U(z)$ tak, že $U(z) \subseteq M$.
- Bod $z \in \mathbb{C}$ se nazývá hraniční bod množiny M, jestliže pro každé $U(z)$ jsou množiny $U(z) \cap M$ a $U(z) \cap (\mathbb{C} \setminus M)$ neprázdné.
- Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M a značí se ∂M.
- Množinu $\overline{M} = M \cup \partial M$ nazýváme uzávěr množiny M.
- Řekneme, že M je uzavřená, jestliže $\overline{M} = M$.

Otevřené a uzavřené množiny

Tvrzení

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. M *je uzavřená.*
2. $\mathbb{C} \setminus M$ *je otevřená.*
3. $\partial M \subseteq M$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Příklad

1. $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ jsou současně otevřené i uzavřené množiny.
2. $U(z)$ a $P(z)$ jsou otevřené množiny pro každé $z \in \mathbb{C}$.
3. $U(\infty)$ je otevřená množina.
4. $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,|\, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ není uzavřená ani otevřená.

Oblast

Definice

Řekneme, že množina $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, jestliže je otevřená a každé dva body z množiny Ω lze spojit lomenou čarou ležící v Ω.

Příklad

1. $P(z)$ je oblast pro každé $z \in \mathbb{C}$.
2. $U(0, \frac{1}{2}) \cup U(1, \frac{1}{2})$ není oblast.

Funkce komplexní proměnné

Definice

Ať $D \subseteq \mathbb{C}$. Zobrazení $f : D \to \mathbb{C}$ se nazve komplexní funkce (komplexní proměnné).

Protože hodnoty komplexní funkce leží v $\mathbb{C}$, můžeme pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ psát

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Terminologie a značení:

- u... reálná část funkce f. Píšeme $u = \operatorname{Re} f$.
- v... imaginární část funkce f. Píšeme $v = \operatorname{Im} f$.

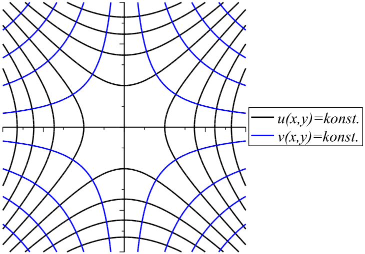
Funkce komplexní proměnné

Interpretace komplexní funkce:

1. Transformace části roviny.
2. Vektorové pole $(u(x,y), v(x,y))$.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^2$. Reálná část funkce f je $u(x,y) = x^2 - y^2$ a imaginární část je $v(x,y) = 2xy$.



Limita

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ a f je komplexní funkce definovaná na $U(z_0) \setminus \{z_0\}$. Řekneme, že f **má limitu** $L \in \mathbb{C}_\infty$ v bodě z_0, jestliže ke každému okolí $U(L)$ existuje okolí $U(z_0)$ takové, že každý bod $z \in U(z_0) \setminus \{z_0\}$ se zobrazí do $U(L)$. Píšeme

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Pravidla pro zacházení s limitami jsou obdobná jako v reálném případě (limita součtu,...).

Limita

Příklad

1. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ neexistuje.
2. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$ ... rozdíl od reálného oboru!

Tvrzení

Předpokládejme, že $L = A + iB \in \mathbb{C}$ *a* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je komplexní funkce definovaná na prstencovém okolí bodu* $z_0 = x_0 + iy_0$*. Potom* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \quad \textit{a} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Spojitost

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na $U(z_0)$. Řekneme, že f je spojitá v bodě z_0, jestliže

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Řekneme, že f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M.

Příklad

Konstantní funkce, z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$ a $|z|$ jsou spojité funkce na $\mathbb{C}$.