Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Definice

Definice

Laplaceovou transformací funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ rozumíme komplexní funkci $\mathscr{L}[f] = F$ definovanou předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} \, \mathrm{d}t$$

za předpokladu, že integrál konverguje pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

Příklad

1. $\mathscr{L}\left[1\right](s) = \frac{1}{s}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > 0$.
2. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Potom $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

Prostor L_0

Definice

Řekneme, že funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ je exponenciálního řádu, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ tak, že $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0, \infty)$. Číslo α se nazývá index růstu funkce f.
Symbolem L_0 označíme množinu všech po částech spojitých funkcí $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, které jsou exponenciálního řádu.

- Množina L_0 je uzavřená na lineární kombinace a (konečné) součiny (tj. je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak $f + g, \alpha f, fg \in L_0$).

Příklad

1. 1, t, $\sin t$ a $\cos t$ jsou v L_0.
2. Každý polynom je v L_0.
3. $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
4. $e^{t^2} \notin L_0$.

Prostor L_0

Věta (O existenci Laplaceovy transformace)

Jestliže $f \in L_0$, pak její Laplaceův obraz $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$ existuje a navíc je holomorfní na polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$, kde α je index růstu funkce f.

Důkaz: Vynecháváme ■

- Úmluva: V dalším nebudeme rozlišovat mezi funkcí $f \in L_0$ a funkcí, která vznikne z f dodefinováním nulou na intervalu $(-\infty, 0)$.

Definice

Funkce

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

se nazývá Heavisideova funkce.

- Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ taková, že $f|_{[0,\infty)} \in L_0$, pak podle naší úmluvy nerozlišujeme mezi $f|_{[0,\infty)}$ a $f \cdot \mathbf{1}$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Tvrzení

Nechť $f, g \in L_0$ *a* $a \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{L}\left[f(t) + ag(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) + a\mathscr{L}\left[g(t)\right](s)$.
2. *Jestliže je* a *kladné reálné číslo, pak* $\mathscr{L}\left[f(at)\right](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$.
3. $\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a)$.
4. *Jestliže je* a *kladné reálné číslo, pak*
   $\mathscr{L}\left[f(t)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t+a)\right](s)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Bod 4 lze (s využitím naší úmluvy) přepsat do tvaru

$$\mathscr{L}\left[f(t-a)\mathbf{1}(t-a)\right](s) = e^{-as}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad

1. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je
$$\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{a} \quad \mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$
2. Pro $a \in \mathbb{C}$ je
$$\mathscr{L}\left[e^{at}\sin t\right](s) = \frac{1}{(s-a)^2+1}.$$
3. Pro $a > 0$ je
$$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-a)\right](s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$
4. $$\mathscr{L}\left[\mathbf{1}(t-2)e^t\right](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ *a* $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L_0$, *pak*

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) = s^n \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, *pak*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = -\mathscr{L}\left[tf(t)\right](s)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

$$\mathscr{L}\left[te^{t}\right](s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta (O obrazu periodické funkce)

Jestliže $f \in L_0$ *je periodická funkce (na intervalu* $[0, \infty)$*) s periodou* $T > 0$ *(tj.* $f(t+T) = f(t)$ *pro každé* $t \in [0, \infty)$*), pak*

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{\int_0^T f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k-2, 2k-1), \\ 0, & t \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2k-1, 2k). \end{cases}$$

Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s\left(1 - e^{-2s}\right)}.$$

Konvoluce

Definice

Nechť $f, g \in L_0$. Funkce $h = f * g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau$$

se nazve konvoluce funkcí f a g.

- Chápeme-li funkce z předchozí definice dodefinované 0 na $(-\infty, 0)$, pak se definice konvoluce shoduje s definicí uvedenou v kapitole o Fourierově transformaci.
- $f * g$ existuje pro každé dvě funkce $f, g \in L_0$ a $f * g \in L_0$.
- Platí: $f * g = g * f$.

Konvoluce

Příklad

Nechť $f, g \in L_0$ jsou dány předpisy $f(t) = t$ a $g(t) = 1$. Potom

$$(f * g)(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L_0$, *potom*

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\,\mathscr{L}\left[g(t)\right](s)\,.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

1. $\mathscr{L}\left[1 * 1\right](s) = \frac{1}{s^2}$.
2. $\mathscr{L}\left[t * e^t\right](s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$.

Inverzní Laplaceova transformace

- Nechť komplexní funkce $F(s)$ je Laplaceova transformace nějaké funkce z L_0. Jak najít její vzor?
- Pro nalezení vzoru potřebujeme najít řešení integrální rovnice

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- Vzor není určen jednoznačně (např. funkce z L_0, které se liší jen na konečné množině, mají stejnou Laplaceovu transformaci).

Věta (Lerchova věta)

Jestliže $f, g \in L_0$ jsou spojité zprava v každém bodě intervalu $[0, \infty)$ a mají stejnou Laplaceovu transformaci, pak $f = g$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

- Značení: Symbolem $\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)$ označíme funkci $f \in L_0$, která je spojitá zprava v každém bodě intervalu $[0,\infty)$ a splňuje $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = F(s)$.

Věta (O inverzi)

Nechť $f \in L_0$ (dodefinovaná nulou na $(-\infty, 0)$) má index růstu α a f' je po částech spojitá na $[0,\infty)$. Jestliže $F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$, potom

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s := \frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to+\infty}\int_{C(a,b)} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s,$$

kde $a > \alpha$ a $C(a,b)$ je úsečka s parametrizací $\varphi(\tau) = a + i\tau$, $\tau \in [-b, b]$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Inverzní Laplaceova transformace

- $\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{ts}\,\mathrm{d}s$ se nazývá Riemannův-Mellinův vzorec a přímka $\operatorname{Re} s = a$ se nazývá Bromwichova linie.

Důsledek

Nechť $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionální funkce taková, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$. Předpokládejme, že $z_1, \ldots, z_n$ jsou všechny póly funkce $F(s)$. Potom

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} F(s)e^{st}$$

pro každé $t \in [0, \infty)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Inverzní Laplaceova transformace

Příklad

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2+1}\right](t) = 2\cos t + 3\sin t.$$

- Při splnění určitých předpokladů lze pomocí součtu reziduí hledat i vzory k jiným funkcím, než jsou funkce racionální. Do této skupiny patří například funkce tvaru

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}.$$

kde $T > 0$ a P, Q jsou polynomy splňující $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$.

Inverzní Laplaceova transformace

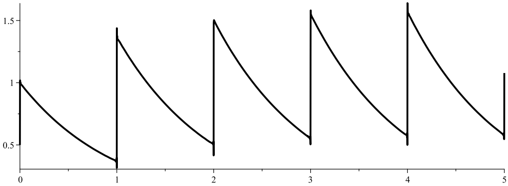
Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi int}}{2\pi in + 1}.$$

Záměrně neznačíme $f(t)$ symbolem $\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)$, neboť $f(t)$ není spojitá zprava na $[0,\infty)$.

Aproximace f tvaru $\frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{n=-1000}^{1000} \frac{e^{2\pi int}}{2\pi in+1}$ má graf:



Inverzní Laplaceova transformace

- Avšak vzorec se součtem reziduí nelze použít vždy!
- Hledáme-li vzor f k $F(s) = G(s)e^{-as}$, nalezneme nejdříve vzor g k funkci G a poté využijeme toho, že $f(t) = g(t-a)\mathbf{1}(t-a)$.

Příklad

1. Pro $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ je vzor $f(t) = \mathbf{1}(t-1)$, ale formální využití vzorce s rezidui by dalo funkci $t \mapsto 1$.
2. $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)(1-e^{-s})}$ má vzor

$$f(t) = \left[\frac{1}{1-e} e^{-(t-1)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n(t-1)}}{2\pi i n + 1}\right] \mathbf{1}(t-1).$$

Aplikace na řešení diferenciálních rovnic

Příklad

Je dána úloha

$$y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Její řešení je $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$ pro $t \geq 0$. Toto řešení lze evidentně prodloužit na $\mathbb{R}$.