Komplexní analýza

Z-transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Motivace a definice

- Analogii Laplaceovy transformace pro posloupnosti – budeme moci používat analytické metody i v diskrétních problémech.
- Aplikace: Řešení diferenčních rovnic, zpracování signálu, ...

Definice

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Konverguje-li řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

na nějakém okolí nekonečna, pak se její součet (na největším možném okolí nekonečna) nazývá Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Značení: Z-transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ budeme značit velkým písmenem (např. $F(z), \dots$) nebo symbolem $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$.

Jednoduché příklady

Příklad

1. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak
$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$$
pro $|z| > |\alpha|$. Speciálně
$$\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$$
pro $|z| > 1$.
2. $$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$$
pro $|z| > 0$.

Prostor Z_0

Definice

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je exponenciálního řádu, jestliže existuje $M > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
Symbolem Z_0 označíme množinu všech komplexních posloupností exponenciálního řádu.

Množina Z_0 je uzavřená na

1. lineární kombinace;
2. (konečné) součiny.

Prostor Z_0

Příklad

1. Každá omezená posloupnost je v Z_0.
2. Je-li P polynom, pak $(P(n))_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.
3. $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.

Věta (O existenci Z-transformace)

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel existuje právě tehdy, když $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Vlastnosti Z-transformace

Tvrzení

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{Z}\left[a_n + \alpha b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) + \alpha \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$.
2. *Jestliže* $\alpha \neq 0$, *pak* $\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. Nechť $\omega \in \mathbb{C}$. Pak

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) &= \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}, \\ \mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) &= \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}. \end{aligned}$$

2. $\mathscr{Z}\left[3 - \frac{2^n}{n!}\right](z) = \frac{3z}{z-1} - e^{\frac{2}{z}}$.

Vlastnosti Z-transformace

Věta (O obrazu posunutí)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $k \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) = z^k \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \ldots - a_{k-1} z.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = -\frac{z}{z^2+1}.$$

Příklad

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je komplexní posloupnost, jejíž Z-transformace je $F(z)$. Pak Z-transformace diference $\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+1} - a_n\right](z) = (z-1)F(z) - z a_0.$$

Vlastnosti Z-transformace

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, *pak*

$$\mathscr{Z}\left[na_n\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Konvoluce

Definice

Konvoluce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž prvky jsou

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Příklad

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$$

Konvoluce

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, *potom*

$$\mathscr{Z}\left[a_n * b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\, \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathscr{Z}\left[1 * 1\right](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Inverzní Z-transformace

Značení: $H_\infty \ldots$ množina všech holomorfních funkcí na nějakém okolí nekonečna (které nelze holomorfně prodloužit na větší okolí nekonečna) s konečnou limitou v nekonečnu.

Věta (O bijektivnosti Z-transformace)

Z-transformace je bijekce množiny Z_0 na množinu H_∞.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Definice

Inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$ je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = F(z)$.
Symbolem $\mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n)$ budeme značit n-tý prvek inverzní Z-transformace funkce F.

Inverzní Z-transformace

Možnosti nalezení inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$:

- rozvojem $F(z)$ do Laurentovy řady konvergující na $U(\infty)$.
- Integrální formulí:

  $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z,$$

  kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $U(\infty)$ (na kterém odpovídající Laurentova řada konverguje).
  Integrál lze často vypočíst pomocí Reziduové věty.
- Využitím vzorce

  $$a_n = \lim_{z \to \infty} z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^k} \right]$$

  pro $n \in \mathbb{N}_0$. Užitečný je zejména vzorec pro koeficient a_0:

  $$a_0 = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

Inverzní Z-transformace

Příklad

Nechť
$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Potom
$$\begin{aligned} a_0 &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 0, \\ a_n &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = -1 + 2^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aplikace

Příklad

Řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 2$ je $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$y_n = 2^n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Aplikace – Model HDP v uzavřené ekonomice

P.A. Samuelson: *Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration*, The Review of Economics and Statistics **21** (1939), 75–78.

Příklad (Samuelson – Model HDP)

Značení:

1. Y_n... HDP v n-tém období;
2. C_n... spotřebitelské výdaje v n-tém období;
3. I_n... soukromé investice v n-tém období;
4. G_n... vládní výdaje v n-tém období;

Předpoklady:

- $Y_n = C_n + I_n + G_n$.
- Existuje $\alpha > 0$ tak, že $C_n = \alpha Y_{n-1}$.
- Existuje $\beta > 0$ tak, $I_n = \beta(C_n - C_{n-1})$.
- $G_n = 1$.

Aplikace – Model HDP v uzavřené ekonomice

Příklad (Samuelson – Model HDP)

Z předpokladů dostaneme pro vývoj HDP diferenční rovnici:

$$Y_{n+2} - \alpha(1+\beta)Y_{n+1} + \alpha\beta Y_n = 1.$$

Volme pro konkrétnost $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\beta = 1$. Pak

$$Y_{n+2} - Y_{n+1} + \frac{1}{2}Y_n = 1.$$

Máme-li počáteční podmínky $Y_0 = 2$ a $Y_1 = 3$, potom řešení je

$$Y_n = 2 + 2^{1-\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Aplikace – teorie informace

C.E. Shannon: *A Mathematical Theory of Communications*, The Bell System Technical Journal **27** (1948), 379–423.

Příklad (Shannon – kapacita diskrétního kanálu bez šumu)

- Zpráva je konečná posloupnost, jejíž prvky jsou symboly $S_1, \dots, S_k$.
- Symbolu S_l (kde $1 \leq l \leq k$) odpovídá signál o délce n_l časových jednotek.

Počet N_n zpráv, jejichž signál má trvání n (kde $n \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$) časových jednotek, je

$$N_n = N_{n-n_1} + \cdots + N_{n-n_k}.$$

Aplikace – teorie informace

Příklad (Shannon – kapacita diskrétního kanálu bez šumu)

Pro jednoduchost předpokládejme, že k dispozici jsou jen dva symboly S_1 a S_2, pro které je $n_1 = 1$ a $n_2 = 2$. Pak musí platit

$$N_{n+2} - N_{n+1} - N_n = 0$$

pro všechna $n \geq 0$. Z interpretace N_n plyne, že počáteční podmínky musí být $N_0 = 0$ a $N_1 = 1$. Proto řešení je

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Kapacita kanálu je

$$C := \lim_{n \to \infty} \frac{\log_2 N_n}{n} = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,69.$$