Komplexní analýza

Derivace komplexní funkce

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Derivace

Definice

Nechť f je komplexní funkce definovaná na jistém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Komplexní číslo $f'(z_0)$ se nazve derivací funkce f v bodě z_0, jestliže

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Místo $f'(z_0)$ píšeme také $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$. Existuje-li $f'(z_0)$, pak říkáme, že f je diferencovatelná v bodě z_0.

Vyšší derivace definujeme jako v reálné analýze rekurzivně:

- $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.
- $f^{(n)}(z_0) = (f^{(n-1)})'(z_0)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Derivace

Jsou-li f a g diferencovatelné v bodě z, potom

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, kdykoli je $g(z) \neq 0$.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Je-li g diferencovatelná v bodě z a f diferencovatelná v bodě $g(z)$, pak

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

Tvrzení

Jestliže f je diferencovatelná v bodě z, pak je v z spojitá.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Věta (Nutná podmínka diferencovatelnosti)

Nechť komplexní funkce f je diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$. Pak $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$ mají parciální derivace v bodě (x_0, y_0) a splňují v tomto bodě tzv. Cauchyovy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Navíc platí, že

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Příklad

Funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale není diferencovatelná v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$!

Věta (Postačující podmínka diferencovatelnosti)

Nechť $z_0 = x_0 + iy_0$ a f je komplexní funkce s reálnou částí u a imaginární částí v. Jestliže u a v mají spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0) a splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky v tomto bodě, pak f je diferencovatelná v bodě z_0.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Funkce $f(z) = |z|^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale je diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$.

Holomorfní funkce

Definice

Komplexní funkce f se nazve holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná v každém bodě $z \in \Omega$.
Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá celistvá.

Příklad

1. Polynom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, kde $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, je celistvá funkce.
2. Racionální funkce $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \neq 0$, je holomorfní funkce na svém definičním oboru $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) \neq 0\}$.

Tvrzení

Je-li $f' = 0$ na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak f je konstantní na Ω.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Harmonické funkce

Definice

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\Omega \subseteq D$ je oblast. Řekneme, že funkce $\Phi : D \to \mathbb{R}$ je harmonická na Ω, jestliže Φ má spojité druhé parciální derivace na Ω a $\Delta\Phi = 0$ na Ω.

Příklad

Je dána celistvá funkce $f(z) = z^2$. Její reálná část $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část $v(x, y) = 2xy$ jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$.

Tvrzení

Nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom reálná a imaginární část funkce f jsou harmonické funkce na Ω.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Harmonické funkce

Definice

Nechť u je harmonická funkce na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Funkci v nazveme harmonicky sdruženou k u, jestliže $u + iv$ je holomorfní funkce na Ω.

Příklad

Je dána funkce $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Funkce u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.
2. Harmonicky sdružená funkce v k funkci u na $\mathbb{R}^2$ je tvaru $v(x, y) = 2xy + y + K$, kde K je libovolná reálná konstanta.