Komplexní analýza

Elementární funkce

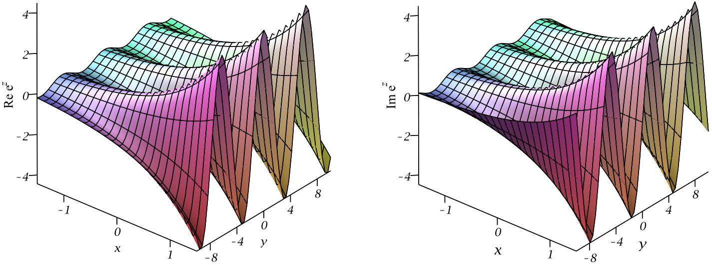
Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Exponenciála

Definice

Komplexní funkce $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se nazývá exponenciální funkce (krátce exponenciála).



Eulerův vzorec: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exponenciála

Tvrzení

Pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ *platí*

1. $e^{z+w} = e^z e^w$;
2. $|e^z| = e^x$, *kde* $x = \operatorname{Re} z$;
3. $e^z \neq 0$;
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
5. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;
6. $e^z = e^w$ *právě tehdy, když* $w = z + 2k\pi i$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: Viz cvičení. ■

Tvrzení

Exponenciála je celistvá funkce a platí $(e^z)' = e^z$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Goniometrické funkce

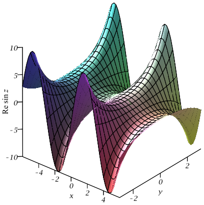
Pro $x \in \mathbb{R}$ plyne z Eulerova vzorce, že

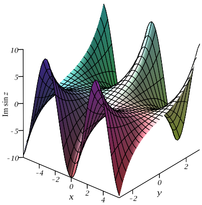
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

To nás motivuje k následující definici:

Definice

Komplexní funkce $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá sinus. Komplexní funkce $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá kosinus.





Goniometrické funkce

Tvrzení

1. $\sin z = 0$ *právě tehdy, když* $z = k\pi$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos z = 0$ *právě tehdy, když* $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(\sin z)' = \cos z$ *a* $(\cos z)' = -\sin z$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Platí analogické identity jako v reálném případě ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \dots$).
- Obdobně jako v reálném případě můžeme definovat funkce tangens a kotangens:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}; \\ \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Hyperbolické funkce

Definice

Hyperbolický sinus je funkce definovaná vztahem $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.
Hyperbolický kosinus je funkce definovaná vztahem $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.

- Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí $(\sinh z)' = \cosh z$ a $(\cosh z)' = \sinh z$.
- Platí vztahy mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi (tzv. Osbornova pravidla):

$$\begin{aligned} \cos(iz) &= \cosh z, \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}; \\ \sin(iz) &= i \sinh z, \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

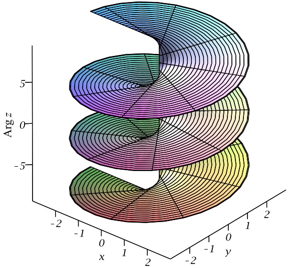
Logaritmus

Příklad

Uvažme rovnici $e^w = z$, kde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je libovolné pevné. Položíme-li $z = |z|e^{i \arg z}$, dostaneme $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$ a $e^{i \operatorname{Im} w} = e^{i \arg z}$. Množina všech řešení uvedené rovnice proto je

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\} = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Přiřazení $z \mapsto \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, je tzv. mnohoznačná funkce nazývaná logaritmus.

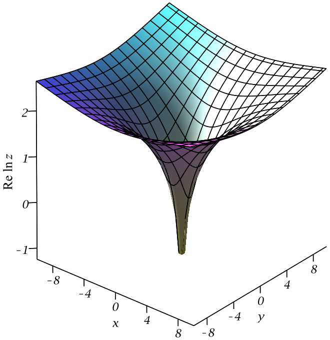


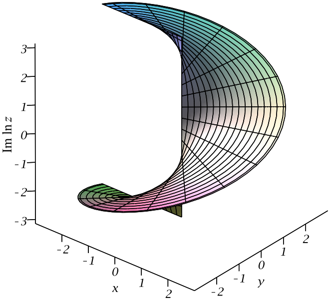
Logaritmus

Vybereme-li pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jednu hodnotu z množiny $\operatorname{Ln} z$, dostaneme komplexní funkci definovanou na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definice

Komplexní funkce $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se nazývá hlavní hodnota logaritmu.





Logaritmus

Příklad

$\ln(1) = 0$, $\ln(-1) = i\pi$, $\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$.

- Platí $\mathrm{Ln}(zw) = \mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, w$, ale obecně je $\ln(zw) \neq \ln z + \ln w$.

Příklad

Pro $z = w = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ je $\ln(zw) = -\frac{i\pi}{2} \neq \frac{3i\pi}{2} = \ln z + \ln w$.

- $e^{\ln z} = z$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ale obecně je $z \neq \ln e^z$.

Příklad

$\ln\left(e^{2\pi i}\right) = 0 \neq 2\pi i$.

- Je-li $z = x + iy$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $y \in (-\pi, \pi]$, pak $\ln e^z = z$.

Logaritmus

- Připomeňme, že

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro } \operatorname{Re} z > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{pro } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{pro } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Tvrzení

Komplexní funkce $\ln z$ *je holomorfní na*

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ *platí* $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■