Komplexní analýza

Křivkový integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Křivky

Definice

Množina $C \subseteq \mathbb{C}$ se nazve křivka, jestliže existuje spojité zobrazení $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ takové, že $C = \{\varphi(t) \mid t \in [a,b]\}$ a $[a,b]$ lze rozdělit na konečně mnoho uzavřených podintervalů, na kterých je φ' spojitá.

Terminologie:

- φ ... parametrizace křivky C.
- $\varphi(a)$ ... počáteční bod křivky C.
- $\varphi(b)$ ... koncový bod křivky C.
- Uzavřená křivka ... $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- Jednoduchá křivka ... jestliže $\varphi(s) = \varphi(t)$ a $s < t$, pak $s = a$ a $t = b$.
- Jordanova křivka ... jednoduchá uzavřená křivka.
- $\varphi'(t)$ ... tečný vektor ke křivce C v bodě $\varphi(t)$.
- $L(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t$ ... délka křivky.

Křivky

- orientace křivky je způsob „procházení“ křivky.
- $-C$ ... opačně orientovaná křivka ke křivce C. (Je-li $\varphi(t)$, $t \in [a,b]$, parametrizace křivky C, pak $\psi(t) = \varphi(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, je parametrizace křivky $-C$.)
- Jordanova křivka je kladně orientovaná ... procházíme-li ji proti směru hodinových ručiček.
- Jordanova křivka je záporně orientovaná ... procházíme-li ji po směru hodinových ručiček.
- Jestliže koncový bod křivky C_1 splývá s počátečním bodem křivky C_2, pak spojením C_1 a C_2 v tomto bodě, vznikne nová křivka, kterou značíme $C_1 + C_2$.
- $C_1 - C_2$ ... spojení křivek C_1 a $-C_2$ (tj. $C_1 + (-C_2)$).

Křivky

Příklad

Úsečka $[z_1, z_2]$ s počátečním bodem $z_1 \in \mathbb{C}$ a koncovým bodem $z_2 \in \mathbb{C}$.

- Parametrizace: $\varphi(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$.
- Délka úsečky: $\int_0^1 |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$.

Příklad

Kružnice se středem $S \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$.

1. Kladně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. Záporně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Délka kružnice je $\int_0^{2\pi} |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = 2\pi R$.

Křivkový integrál v komplexní rovině

Definice

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ a nechť f je komplexní funkce spojitá funkce na C. Pak křivkový integrál funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci (parametrizace zadávající stejnou orientaci vedou na stejnou hodnotu křivkového integrálu).

Příklad

Ať $n \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem z_0 a poloměrem $R > 0$. Potom

$$\int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Křivkový integrál v komplexní rovině

Tvrzení (Vlastnosti křivkového integrálu)

Nechť C a K jsou křivky a počáteční bod křivky K je koncovým bodem křivky C. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ a komplexní funkce f, g jsou spojité na C. Potom

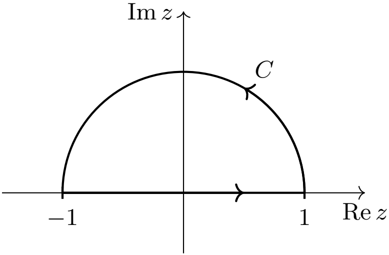
1. $\int_C \alpha f(z) + g(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z$;
2. $\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$;
3. $\int_{C+K} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_K f(z)\,\mathrm{d}z$, *kdykoli je navíc f spojitá na $C+K$;*
4. $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(C) \max_{z\in C} |f(z)|$.

Důkaz: Viz přednáška (jen 4, důkaz zbylých bodů – domácí cvičení). ∎

Křivkový integrál v komplexní rovině

Příklad

Ať C je křivka zadaná následujícím obrázkem:



Pak $\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = i\pi$.

Jednoduchá souvislost

Věta (Jordanova věta)

Je-li C Jordanova křivka v $\mathbb{C}$, pak $\mathbb{C} \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\operatorname{Int} C$ a neomezené oblasti $\operatorname{Ext} C$, které nemají žádný společný prvek.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Terminologie:

- $\operatorname{Int} C \dots$ vnitřek Jordanovy křivky C.
- $\operatorname{Ext} C \dots$ vnějšek Jordanovy křivky C.

Definice

Říkáme, že oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá, jestliže pro každou Jordanovu křivku $C \subseteq \Omega$ je $\operatorname{Int} C \subseteq \Omega$.

Příklad

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Okolí $U(z_0)$ je jednoduše souvislá oblast. Okolí $U(\infty)$ a prstencové okolí $P(z_0)$ nejsou jednoduše souvislé oblasti.

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (Cauchyova věta)

Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pro každou uzavřenou křivku ležící v Ω.

Důkaz: Viz přednáška (za dodatečných předpokladů: C je Jordanova křivka a f' je spojitá na Ω). ■

- Předpoklad jednoduché souvislosti Ω podstatný! (Již víme, že pro kladně orientovanou kružnici C se středem v 0 je $\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.)

Příklad

1. $\int_C z^2\,\mathrm{d}z = 0$ pro každou uzavřenou křivku C.
2. Ať C je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1. Pak $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = 0$.

Cauchyova věta a některé její důsledky

Tvrzení (Princip deformace)

Předpokládejme, že C_1 a C_2 jsou kladně orientované Jordanovy křivky v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ takové, že $C_1 \subseteq \operatorname{Int} C_2$. Nechť $z_0 \in \operatorname{Int} C_1$ a f je holomorfní v $\Omega \setminus \{z_0\}$, pak

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C mající ve svém vnitřku bod z_0 platí

$$\int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (Cauchyho vzorec)

Nechť f je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω, $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka a $z_0 \in \operatorname{Int} C$. Potom f má v z_0 derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Příklad

Je dána kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$. Pak

1. $\int_C \frac{z^2-4z+4}{z+i} \, \mathrm{d}z = \pi(-8 + 6i)$.
2. $\int_C \frac{z^2-4z+4}{(z+i)^2} \, \mathrm{d}z = -\pi(-4 + 8i)$.

Cauchyova věta a některé její důsledky

Věta (Existence všech derivací)

Jestliže f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak má f na Ω derivace všech řádů.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Liouvillova věta)

Omezená celistvá funkce je konstantní.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Základní věta algebry)

Každý polynom alespoň prvního stupně má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz: Viz přednáška. ■