Komplexní analýza

Mocninné řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Posloupnosti komplexních čísel – opakování

Definice

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel má limitu $L \in \mathbb{C}_\infty$, jestliže pro každé $U(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n \in U(L)$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Tvrzení

1. *Nechť $L \in \mathbb{C}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} L$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} L$.*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.*

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Příklad

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2n-in}{n+1} = 2 - i$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$.

Řady komplexních čísel – opakování

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . . . (nekonečná) řada komplexních čísel.
- $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. . . n-tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- $(s_n)_{n=0}^{\infty}$. . . posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definice

Číslo $s \in \mathbb{C}$ se nazývá součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexních čísel, má-li její posloupnost částečných součtů konečnou limitu s. Píšeme $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Říkáme, že řada komplexních čísel konverguje, jestliže existuje její součet. V opačném případě říkáme, že řada diverguje.

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Řady komplexních čísel – opakování

Definice

Říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Tvrzení

Jestliže řada konverguje absolutně, potom konverguje.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Tvrzení (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada komplexních čísel. Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nezáporných reálných čísel konverguje a $|a_n| \le b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Řady komplexních čísel – opakování

Tvrzení (Podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada nenulových komplexních čísel a*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, +\infty].$$

1. *Jestliže* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*
2. *Jestliže* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ konverguje absolutně.

Řady komplexních čísel – opakování

Tvrzení (Odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada komplexních čísel* a_n *a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty].$$

1. *Jestliže* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*
2. *Jestliže* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

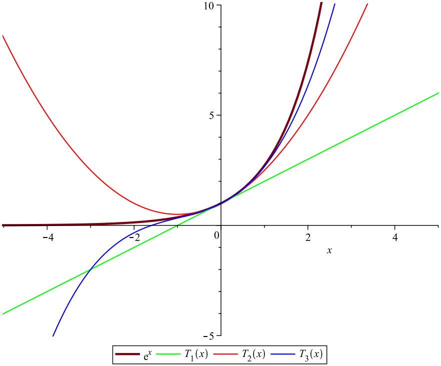
Příklad

$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n$ diverguje.

- Připomeňme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

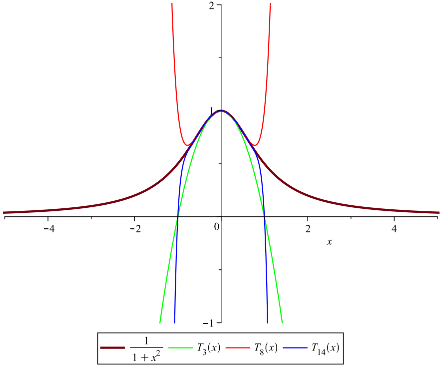
Mocninné řady – motivace

- Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ má funkce e^x, $x \in \mathbb{R}$, v 0 Taylorův polynom
$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$
- $T_n(x)$ dobře aproximuje e^x na nějakém okolí bodu 0.
- Lze e^x psát jako „nekonečný polynom" $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$?



Mocninné řady – motivace

- Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ má funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, v 0 Taylorův polynom $T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
- Lze $f(x)$ psát jako „nekonečný polynom“ $f(x) = 1 - x^2 + \ldots$? Pokud ano, tak na jakém intervalu?
- Z obrázku vidíme, že na celém $\mathbb{R}$ asi ne. Kde je problém?



Mocninné řady – základní definice

- Připomeňme, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ jsme definovali $z^0 = 1$.

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde z je komplexní proměnná, se nazývá mocninná řada se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

Definice

Řekneme, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje (resp. absolutně konverguje) v bodě $w \in \mathbb{C}$, jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$ komplexních čísel konverguje (resp. absolutně konverguje).
Nekonverguje-li mocninná řada v bodě $w \in \mathbb{C}$, pak říkáme, že diverguje v bodě w.

Mocninné řady – základní definice

- Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolutně konverguje v bodě $z = z_0$.

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$.

1. Říkáme, že mocninná řada konverguje na M (resp. absolutně konverguje na M), jestliže konverguje (resp. absolutně konverguje) v každém bodě množiny M.
2. Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje na M, pak jejím součtem na M rozumíme funkci $f(z)$ definovanou předpisem

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in M.$$

Píšeme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in M$.

Konvergence mocninných řad

Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

1. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq 1$ uvedená řada diverguje.
2. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < 1$ uvedená řada konverguje absolutně a platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Tvrzení

Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *v bodě* $w \in \mathbb{C}$*, pak absolutně konverguje na množině* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < |w-z_0|\}$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Poloměr konvergence

Definice

Číslo

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n < \infty \right\} \in [0, +\infty]$$

se nazývá poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ a okolí $U(z_0, R)$ se nazývá kruh konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

- Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| < R$ mocninná řada absolutně konverguje a pro všechna $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| > R$ diverguje.

Příklad

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \ldots R = 0.$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n(z - i)^n \ldots R = 1.$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ldots R = 1.$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ldots R = \infty.$

Operace s mocninnými řadami

Tvrzení

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *má poloměr konvergence* R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *má poloměr konvergence* R_2, $R = \min\{R_1, R_2\}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *a*

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R_1), \\
g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R_2).
\end{aligned}
$$

Potom $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *mají poloměr konvergence nejméně* R *a*

1. $f(z)+g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$;
2. $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Operace s mocninnými řadami

Věta (Derivování člen po členu)

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$ *a* $f(z)$ *je její součet na* $U(z_0, R)$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ *má poloměr konvergence* R.
2. $f(z)$ *je holomorfní na* $U(z_0, R)$ *a* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ *na* $U(z_0, R)$.
3. $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Definice

Nechť funkce f má derivace všech řádů v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ se nazývá Taylorova řada funkce f o středu z_0.

Operace s mocninnými řadami

Tvrzení (Princip neurčitých koeficientů)

Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *na nějakém okolí* $U(z_0)$*, pak* $a_n = b_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ∎

- Koeficienty mocninné řady jsou určeny jen chováním jejího součtu na libovolně malém okolí bodu z_0.

Příklad

Je dána rovnice $f'(z) = 2zf(z)$ a počáteční podmínka $f(0) = 1$. Její řešení ve tvaru mocninné řady je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$. (Poloměr konvergence této řady je $R = \infty$, tj. našli jsme řešení na $\mathbb{C}$.)

Operace s mocninnými řadami

Věta (Integrování člen po členu)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$ *a* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, R)$.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ *má poloměr konvergence* R.
2. *Funkce* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$, $z \in U(z_0, R)$, *je primitivní funkce k funkci* $f(z)$ *(tj.* $F'(z) = f(z)$*) na* $U(z_0, R)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ má součet $\frac{1}{(1-z)^2}$ pro $|z| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ má součet $-\ln(1-z)$ pro $|z| < 1$.

Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

Věta (Existence Taylorova rozvoje)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z)$ je holomorfní funkce na $U(z_0)$. Potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in U(z_0)$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Terminologie:

- Taylorova řada z právě uvedené věty se také někdy nazývá rozvoj funkce f do mocninné řady na okolí $U(z_0)$.

Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

Příklad

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
2. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
3. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
4. $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
5. $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ pro $|z| < 1$.