# Komplexní analýza

## Laurentovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

# Motivace

Uvažme funkci

$$f(z) = \frac{1}{z-1}.$$

- Funkce $f(z)$ má rozvoj do mocninné řady ve tvaru

  $$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

  pro $|z| < 1$.
- Funkce $f(z)$ je ale definovaná i pro $|z| > 1$. Má pro taková $z$ rozvoj do řady obsahující mocniny $z$?
- Pokud připustíme i záporné mocniny, tak ano, protože

  $$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

  pro $|z| > 1$.

# Laurentovy řady

## Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $z$ je komplexní proměnná, se nazývá Laurentova řada se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá regulární část Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ se nazývá hlavní část Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

# Konvergence Laurentovy řady

### Definice

Řekneme, že Laurentova řada konverguje (resp. konverguje absolutně) v bodě $w \in \mathbb{C}$, jestliže v bodě $w \in \mathbb{C}$ konverguje (resp. absolutně konverguje) současně její hlavní a regulární část.
Nekonverguje-li Laurentova řada v bodě $w \in \mathbb{C}$, pak říkáme, že diverguje v bodě $w$.

### Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$. Říkáme, že Laurentova řada konverguje na $M$ (resp. absolutně konverguje na $M$), jestliže konverguje (resp. absolutně konverguje) v každém bodě množiny $M$.

# Součet Laurentovy řady

**Definice**

Nechť Laurentova řada konverguje na $M \subseteq \mathbb{C}$, funkce $s_r(z)$ je součet její regulární části na $M$ a funkce $s_h(z)$ je součet její hlavní části na $M$. Potom funkce $s_r(z) + s_h(z)$ se nazve součtem Laurentovy řady na $M$. Je-li $f(z)$ součet řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ na $M$, pak píšeme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in M$.

**Definice**

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0; r; R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - z_0| < R\}$$

se nazve mezikruží o středu $z_0$, vnitřním poloměru $r$ a vnějším poloměru $R$.

# Laurentovy řady a holomorfní funkce

**Tvrzení**

*Nechť* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentova řada. Pak existují* $r, R \in [0, +\infty]$ *tak, že*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konverguje absolutně pro* $|z-z_0| < R$ *a diverguje pro* $|z-z_0| > R$*;*
2. $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ *konverguje absolutně pro* $|z-z_0| > r$ *a diverguje pro* $|z-z_0| < r$*.*

*Je-li* $r < R$*, pak* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konverguje absolutně na mezikruží* $P(z_0; r; R)$ *a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Terminologie:

- $P(z_0; r; R)$ z předchozího tvrzení se nazývá mezikruží konvergence Laurentovy řady.

# Laurentovy řady a holomorfní funkce

## Příklad

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}}(z-i)^n$ má mezikruží konvergence $P(i; \frac{1}{2}; 2)$. Její součet na $P(i; \frac{1}{2}; 2)$ je $f(z) = \frac{1}{2(z-i)-1} + \frac{2}{2-(z-i)}$.
2. $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ diverguje v každém bodě $z \in \mathbb{C}$.

## Věta (Rozvoj do Laurentovy řady)

*Nechť funkce $f$ je holomorfní na mezikruží $P(z_0; r; R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se součtem $f(z)$ na $P(z_0; r; R)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

*kde $C$ je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka, která leží v $P(z_0; r; R)$ a má ve svém vnitřku bod $z_0$.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

# Laurentovy řady a holomorfní funkce

Laurentova řada z předchozí věty se nazývá Laurentův rozvoj funkce $f$ na $P(z_0; r; R)$.

**Příklad**

1. $\frac{e^z}{z} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ na $P(0; 0; \infty)$.
2. $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ na $P(0; 0; 1)$.
3. $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} -z^n$ na $P(0; 1; \infty)$.
4. $\frac{3}{z(3-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$ na $P(1; 1; 2)$.

# Izolované singularity

### Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f$, jestliže $f$ je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0$ a v bodě $z_0$ nemá derivaci.

### Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v $0$.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má izolovanou singularitu v $0$.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má izolovanou singularitu v $2$.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v $0$.
5. Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v $0$.

# Klasifikace izolovaných singularit

## Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f$ a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

1. Řekneme, že $z_0$ je odstranitelná singularita, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.
2. Řekneme, že $z_0$ je pól, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo $k$ se nazývá řád (nebo také násobnost) pólu.
3. Řekneme, že $z_0$ je podstatná singularita, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel $n$.

Terminologie:

- Pól řádu $k$ se také nazývá $k$-násobný pól.
- Pól řádu 1 se také nazývá jednoduchý pól.

# Určování typů izolovaných singularit

**Příklad**

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má odstranitelnou singularitu v $0$.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má jednoduchý pól v $0$.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má pól řádu 5 v $2$.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má podstatnou singularitu v $0$.

# Kořen funkce

## Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f$ je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$. Řekneme, že $f$ má kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$ v $z_0$, jestliže $f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Terminologie:

- místo kořen násobnosti $k$ říkáme také $k$-násobný kořen.

## Tvrzení

*Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f$ je holomorfní na okolí $U(z_0)$. Pak $z_0$ je kořen $k$-násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce $g$ na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.*

Důkaz: Viz přednáška. ∎

# Póly a odstranitelné singularity

**Tvrzení**

*Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce $f$ a $g$ jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže $f$ má v $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a $g$ má v $z_0$ kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě $z_0$*

1. *odstranitelnou singularitu, jestliže $m \geq n$;*
2. *pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Příklad**

1. $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
2. $\frac{1-\cos z}{z^8+z^5}$ má v 0 trojnásobný pól.
3. $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$ má jednoduché póly v bodech $\frac{1}{2n\pi i}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bod $0$ není izolovanou singularitou funkce $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$.

# Izolované singularity a limita

**Věta (Charakterizace typů izolovaných singularit)**

*Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f$.*

1. *Funkce $f$ má v $z_0$ odstanitelnou singularitu právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ je konečná.*
2. *Funkce $f$ má v $z_0$ pól právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Funkce $f$ má v $z_0$ $k$-násobný pól právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná nenulová.*
3. *Funkce $f$ má v $z_0$ podstatnou singularitu právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.*

Důkaz: Vynecháváme. ■