Komplexní analýza

Fourierovy řady

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Fourierovy řady – opakování

- Značení:

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

- Ať $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Fourierova řada funkce $f \in L^2([a, a+T])$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

  kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \, \mathrm{d}t \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0;$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \, \mathrm{d}t \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Fourierovy řady – opakování

- Konverguje-li Fourierova řada funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$, označíme její součet symbolem $\mathscr{F}_f(t)$.
- Definici bychom mohli rozšířit i na funkce z prostoru

$$L^1([a, a+T]) = \left\{ f : [a, a+T] \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_a^{a+T} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

- Dále budeme výše uvedenou řadu nazývat reálným tvarem Fourierovy řady (nebo také reálnou Fourierovou řadou) funkce f.

Komplexní tvar Fourierovy řady

- Komplexní tvar Fourierovy řady (nebo také komplexní Fourierova řada) funkce $f \in L^2([a, a+T])$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \, \mathrm{d}t.$$

- Koeficienty c_n se nazývají (komplexní) Fourierovy koeficienty funkce f.

Souvislost koeficientů a_n, b_n a c_n

- $$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{ia_n + b_n}{2i} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
  $$c_{-n} = \frac{ia_n - b_n}{2i} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

  Tedy

  $$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0;$$
  $$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

- Nabývá-li f pouze reálných hodnot, pak

  $$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

  V tomto případě je tak

  $$\begin{aligned} a_n &= 2\mathrm{Re}\, c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0; \\ b_n &= -2\mathrm{Im}\, c_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Jednoduchý příklad

Příklad

Uvažme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0), \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Zřejmě $f \in L^2([-1, 1])$. Komplexní Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 - (-1)^n}{2\pi i n} e^{i\pi n t} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi(2n+1)} e^{i\pi(2n+1)t},$$

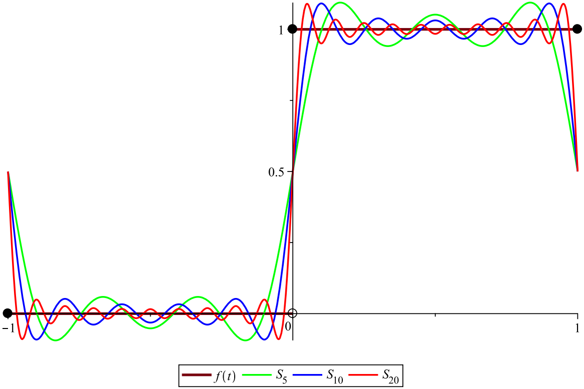
Reálná Fourierova řada funkce f je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(\pi n t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin(\pi(2n+1)t).$$

Jednoduchý příklad – částečné součty

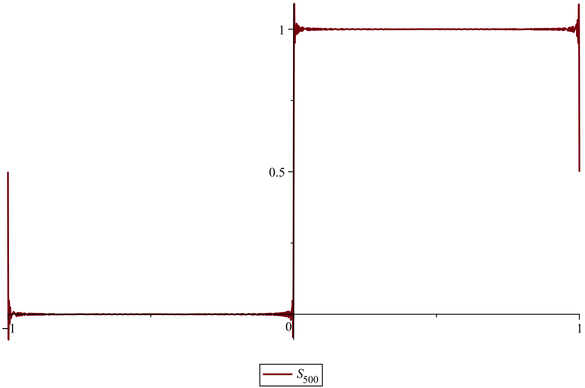
Příklad (Pokračování)

Označme $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.



Jednoduchý příklad – Gibbsův jev

Příklad (Pokračování)



Velikost „překmitů“ částečných součtů S_n blízko bodů, ve kterých není f spojitá, se nezmenšuje s rostoucím n. Tomuto jevu se říká Gibbsův jev.

Bodová konvergence

Definice

Řekneme, že funkce $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je po částech spojitá na $[a, b]$, jestliže existuje konečně mnoho bodů $t_0, \ldots, t_n \in [a, b]$ tak, že

1. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$;
2. $\bigcup_{k=0}^{n-1} (t_k, t_{k+1}) \subseteq D$;
3. pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ je f spojitá na (t_{k-1}, t_k);
4. $f(t_k+) = \lim\limits_{t \to t_k+} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{0, \ldots, n-1\}$;
5. $f(t_k-) = \lim\limits_{t \to t_k-} f(t)$ je konečná pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$.

- Podle uvedené definice nemusí být po částech spojitá funkce definována v bodech $t_0, \ldots, t_n$.

Bodová konvergence

Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *a* $f : [a, a+T] \to \mathbb{C}$. *Předpokládejme, že* f *a* f' *jsou po částech spojité funkce na* $[a, a+T]$. *Pak (komplexní i reálná) Fourierova řada funkce* f *konverguje v každém bodě intervalu* $[a, a+T]$ *a její součet je*

1. $\mathscr{F}_f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right]$ *pro každé* $t \in (a, a+T)$;
2. $\mathscr{F}_f(a) = \mathscr{F}_f(a+T) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f((a+T)-)\right]$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

- Jsou-li splněny předpoklady Dirichletovy věty, f je spojitá na $[a, a+T]$ a $f(a) = f(a+T)$, pak $f(t) = \mathscr{F}_f(t)$ pro každé $t \in [a, a+T]$. V tomto případě je tak $\mathscr{F}_f(t)$ periodickým rozšířením funkce $f(t)$.

Příklady

Příklad

Již víme, že komplexní Fourierova řada funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in [-1, 0) \\ 1 & \text{pro } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

je

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 - (-1)^n}{2\pi i n} e^{i\pi n t}.$$

Podle Dirichletovy věty konverguje tato řada pro každé $t \in [-1, 1]$ (a tedy pro každé $t \in \mathbb{R}$) a platí, že

$$\mathscr{F}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro každé } t \in (-1, 0), \\ 1 & \text{pro každé } t \in (0, 1), \\ \frac{1}{2} & \text{pro každé } t \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

Příklady

Příklad

Je dána funkce
$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Komplexní Fourierova řada této funkce je
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{2int}.$$

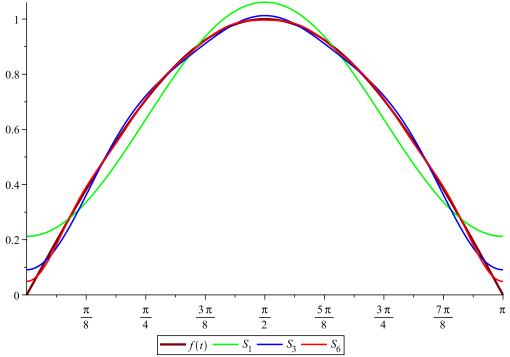
Reálná Fourierova řada této funkce je
$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nt)\,.$$

Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f(t) = |\sin t|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Příklady

Příklad (Pokračování)

Označme $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.



Z Dirichletovy věty plyne, že $\mathscr{F}_f(t) = |\sin t|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost

Věta (Parsevalova rovnost)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2([a, a+T])$. Jestliže $c_n \in \mathbb{C}$ jsou komplexní Fourierovy koeficienty funkce f, pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Pro reálné Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in L^2([a, a+T])$ má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$