Komplexní analýza

Fourierova transformace

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Motivace a definice

- Chceme najít rozklad do funkcí $e^{i\omega t}$ i pro neperiodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- Aplikace: Zpracování signálu, fyzika, matematika,...

Definice

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Fourierova transformace funkce f je funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Inverzní Fourierova transformace funkce f je funkce $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Poznámky

- Jiné značení: $\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$ a $\check{f}(\omega) = \mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](\omega)$.
- Integrál v definici Fourierovy transformace chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Postačující podmínka pro existenci Fourierovy transformace (a inverzní Fourierovy transformace) je $f \in L^1(\mathbb{R})$, kde

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty \right\}.$$

Fourierova transformace charakteristické funkce

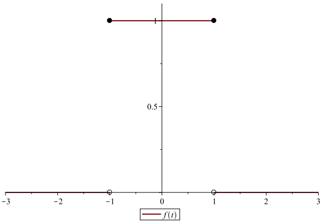
Příklad

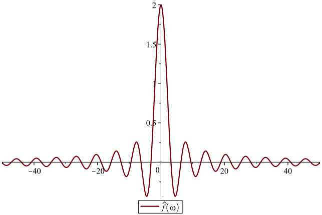
Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\frac{\sin \omega}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}.$$





Základní vlastnosti

Příklad

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Tvrzení

Nechť funkce f a g mají Fourierovu transformaci a $a \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{F}\left[f(t) + ag(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) + a\mathscr{F}\left[g(t)\right](\omega)$.
2. $\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = 2\pi\mathscr{F}^{-1}\left[f(t)\right](-\omega)$.
3. *Je-li* $a \in \mathbb{R}$, *pak* $\mathscr{F}\left[f(t-a)\right](\omega) = e^{-i\omega a}\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)$.
4. *Je-li* $a \in \mathbb{R}$, *pak* $\mathscr{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega - a)$.
5. *Je-li* $a \in \mathbb{R}$ *nenulové, pak* $\mathscr{F}\left[f(at)\right](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}\left[f(t)\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Základní vlastnosti

Příklad

$$\mathscr{F}\left[\frac{e^{it}}{1+(2t-3)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}}e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$$

Věta (O spojitosti obrazu)

Jestliže $f \in L^1(\mathbb{R})$, *pak* $\hat{f}$ *je spojitá funkce.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta (Obraz derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ *a* $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ *jsou spojité, pak*

$$\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^n \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Základní vlastnosti

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f(t)$ a $tf(t)$ leží v $L^1(\mathbb{R})$, pak

$$\mathscr{F}\left[tf(t)\right](\omega) = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad (Obraz Gaussovy funkce)

$$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right](\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}\,.$$

Odtud plyne, že pro $a > 0$ je

$$\mathscr{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\,.$$

Konvoluce

Definice

Konvoluce funkcí $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ je funkce $h=f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definovaná vztahem

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- Existuje-li konvoluce $f*g$, pak $f*g=g*f$.
- Lze ukázat, že pro $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ je $f*g\in L^1(\mathbb{R})$.

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, *potom*

$$\mathscr{F}\left[(f*g)(t)\right](\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega)\,\mathscr{F}\left[g(t)\right](\omega)\,.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Konvoluce

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Potom

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty), \\ t + 2, & t \in (-2, 0], \\ 2 - t, & t \in (0, 2]. \end{cases}$$

Fourierova transformace $f * f$ je

$$\mathscr{F}\left[(f * f)(t)\right](\omega) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Věta o inverzi

Definice

Funkce f se nazve po částech spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, jestliže je po částech spojitá na každém intervalu $[a, b] \subseteq I$.

Věta (O inverzní Fourierově transformaci)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. *Je-li* f *spojitá a* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, *pak pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *je*

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\right](t)\,.$$

2. *Jestliže* f *a* f' *jsou po částech spojité (na* $\mathbb{R}$*), pak pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *je*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}(\omega)\right](t)\,.$$

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Věta o inverzi

Důsledek

Jestliže dvě spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$ mají stejnou Fourierovu transformaci, potom se rovnají.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Je dána diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t^2}.$$

Využitím Fourierovy transformace dostaneme řešení:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-(t-\tau)^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

Souvislost s Fourierovou řadou

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je periodická funkce s periodou $T > 0$ a $f|_{[a,a+T]} \in L^2([a, a+T])$. Položme

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, a+T], \\ 0, & t \notin [a, a+T]. \end{cases}$$

Pak Fourierovy koeficienty c_n funkce $f|_{[a,a+T]}$ jsou

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \mathscr{F}\left[f_T(t)\right] \left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Souvislost s Fourierovou řadou

Příklad

Ať

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Již víme, že

$$\mathscr{F}\left[(f * f)(t)\right](\omega) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Fourierova řada zúžení funkce $f * f$ na interval $[-2, 2]$ proto je

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} e^{i \frac{\pi n}{2} t}.$$

Dodatky

- Jsou-li $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, pak platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

  Odtud dostáváme tzv. Plancherelovu rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

- Zobecnění Fourierovy transformace do více poměnných: Fourierova transformace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ je funkce $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ daná předpisem

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,p\rangle}\,\mathrm{d}x.$$

  Analogicky se definuje inverzní Fourierova transformace funkce f.