Úvod

Zadání

1. Nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z, jestliže
   (a) $z = \frac{(1-2i)^2}{1+i}$;
   (b) $z = (1+i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i}$;
   (c) $z = \frac{2+3i}{1+2i} - \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$.
2. Dokažte, že pro všechna $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
3. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla z, jestliže
   (a) $z = 3 + 4i$;
   (b) $z = \frac{i^{31}}{2-i}$.
4. Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla
   $$z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{\sqrt{3}i - 1}$$
   a s jeho pomocí nalezněte reálnou a imaginární část komplexního čísla z^{12}.
5. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, aby
   $$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n = -1.$$
6. Ať $z = x + iy \neq 0$. Ukažte, že
   $$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{je-li } x > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y < 0; \\ \pi, & \text{je-li } y = 0 \text{ a } x < 0. \end{cases}$$
7. Ať $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Ukažte, že
   $$\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$
8. Ať z, w jsou dvě nenulová komplexní čísla, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Ukažte, že $z = w$ právě tehdy, když $|z| = |w|$ a existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $\varphi = \psi + 2k\pi$.
9. Popište geometricky množinu všech $z \in \mathbb{C}$ splňujících
   (a) $|z + 1| = 2$;
   (b) $|z - 1| < 1$ a $|z| = |z - 2|$;

(c) $|z|^2 > z + \overline{z}$;

(d) $\operatorname{Re} z = |z-2|$.

10. V oboru komplexních čísel řešte rovnici

    (a) $z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$;

    (b) $z^3 = 1$;

    (c) $z^4 = 81i$;

    (d) $z^5 + 1 + i = 0$;

    (e) $z^n = \overline{z}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

11. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}, \quad z \in \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| \geq 1\}.$$
Nalezněte reálnou a imaginární část této funkce a interpretujte f geometricky. Dále nalezněte obraz přímky $\operatorname{Im} z = 2$.

12. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce
$$f(z) = \frac{2z^2 + 3}{|z-1|}$$
a rozhodněte, zda
$$i \in M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} f(z) \geq 0, \operatorname{Im} f(z) = 0\}.$$

13. Nalezněte reálnou a imaginární část funkce
$$f(z) = |z| + \frac{z-i}{z+1}$$
a rozhodněte, zda
$$2i \in M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} f(z) \geq 1, \operatorname{Im} f(z) < 0\}.$$

14. Rozhodněte, zda exisuje limita $\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im} z}{z}$. Pokud ano, spočtěte ji.

15. Ukažte, že funkce $f(z) = \arg z$ není v bodě -1 spojitá.

Výsledky

1. (a) $\operatorname{Re} z = -\frac{7}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$;
   (b) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$;
   (c) $\operatorname{Re} z = \frac{13}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$.

3. (a) $z = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;
   (b) $z = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\varphi = -\operatorname{arctg} 2$.

4. $z = \sqrt{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\varphi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{Re} z^{12} = 2^6$ a $\operatorname{Im} z^{12} = 0$.

5. $n = 6(2k+1)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

9. (a) Kružnice o středu -1 a poloměru 2.
   (b) Úsečka bez krajních bodů $1+i$ a $1-i$.
   (c) Množina bodů ležících vně kružnice o středu 1 a poloměru 1.
   (d) Parabola o rovnici $4(x-1) = y^2$.

10. (a) $z_n = 2(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{3} + n\pi$ a $n = 0, 1$;
    (b) $z_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}$, kde $n = 0, 1, 2$;
    (c) $z_n = 3(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ a $n = 0, 1, 2, 3$;
    (d) $z_n = \sqrt[10]{2}(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, kde $\varphi_n = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{5}$ a $n = 0, 1, 2, 3, 4$;
    (e) Pro $n = 1$ je řešení libovolné $z \in \mathbb{R}$; pro $n > 1$ je řešení $z = 0$ a také $z_m = \cos\varphi_m + i\sin\varphi_m$, kde $\varphi_m = \frac{2m\pi}{n+1}$, $m = 0, 1, ..., n$.

11. $\operatorname{Re} f = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{y}{x^2+y^2}$. Bod z se zobrazí na bod $w = \frac{z}{|z|^2}$. Obraz přímky je kružnice (bez bodu 0) o poloměru $\frac{1}{4}$ a středu $\frac{i}{4}$.

12. $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, $v(x,y) = \frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$ a $i \in M$.

13. $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$ a $2i \notin M$.

14. Neexistuje.