Laplaceova transformace

Zadání

1. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = t\sin(t)$.

2. Je dána funkce
$$f(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t + 1 & t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \cos t & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \\ -1 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$
   (a) Pomocí Heavisideovy funkce $\mathbf{1}(t)$ zapište předpis pro funkci f.
   (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce f.

3. Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce s periodou $T > 0$, která je zadána předpisem $f(t) = \mathbf{1}(t - \frac{T}{2})$ pro $t \in [0, T)$.

4. Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = |\sin(t)|$.

5. Je dána funkce
$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin t, & t \in [0, \pi); \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$
   (a) Zapište $f(t)$ pomocí Heavisideovy funkce.
   (b) Nalezněte Laplaceovu transformaci $F(s)$ funkce $f(t)$.
   (c) Nalezněte Laplaceovu transformaci $G(s)$ periodické funkce $g(t)$ s periodou $T = 2\pi$ danou na $[0, 2\pi]$ předpisem $g(t) = f(t)$.

6. Stanovte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce
   (a) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$;
   (b) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1}$;
   (c) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{1-3s}{s^4}$.

7. Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

8. Nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(1-e^{-2s})}$ ve tvaru Fourierovy řady.

9. Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici
$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-2t}$$
   s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$.

10. Pomocí Laplaceovy transformace řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) = t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 4$.

11. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$.

12. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y'(t) - 2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathbf{1}(t-1)$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$.

Výsledky

1. $F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

2. (a) $f(t) = \left(-\frac{2}{\pi}t + 1\right)\left[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})\right] + (\cos t)\left[\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) - \mathbf{1}(t-\pi)\right] - \mathbf{1}(t - \pi)$.

   (b) $\mathscr{L}[f(t)](s) = -\frac{2}{\pi s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}s}}{\pi s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$.

3. $\mathscr{L}[f(t)](s) = \frac{1-e^{\frac{Ts}{2}}}{s(1-e^{Ts})}$.

4. $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$.

5. (a) $f(t) = (e^{-2t}\sin t)\,[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi)]$.

   (b) $F(s) = \frac{1+e^{-\pi(s+2)}}{(s+2)^2+1}$.

   (c) $G(s) = \frac{1+e^{-\pi(s+2)}}{[(s+2)^2+1](1-e^{-2\pi s})}$.

6. (a) $f(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$;

   (b) $f(t) = \left(\frac{e^{t-1}}{2} - \frac{e^{-(t-1)}}{2}\right)\mathbf{1}(t-1)$;

   (c) $f(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - (t-1)e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2)$.

7. $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\pi nt}}{2i\pi n}$.

8. $f(t) = \frac{1}{1-e^2}te^{-t} + \frac{2e^2}{(1-e^2)^2}e^{-t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi nt}}{2(1+i\pi n)^2}$.

9. $y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}$ pro $t \geq 0$.

10. $y(t) = 4 + \frac{5t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$ pro $t \geq 0$.

11. $y(t) = 1 - [1 - \cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1)$ pro $t \geq 0$.

12. $y(t) = (1 - t + e^{t-1} - e^{1-t})\,\mathbf{1}(t-1)$ pro $t \geq 0$.