

Elementární funkce

Zadání

1. Ukažte, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí

(a) $e^{z+w} = e^z e^w$;

(b) $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$;

(c) $e^z \neq 0$;

(d) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

(e) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$;

(f) $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

2. Ukažte, že $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

3. Nalezněte velikost komplexního čísla

$$z = e^{-7\pi + \frac{3}{2}i}.$$

4. Číslo

$$w = e^\pi (\cos 2 - i \sin 2)$$

zapište ve tvaru e^z pro nějaké vhodné $z \in \mathbb{C}$.

5. Určete, v kterém kvadrantu leží komplexní číslo

$$z = e^{\overline{\left(2 + \frac{99\pi i}{200}\right) - \frac{i\pi}{2}}}.$$

6. Nalezněte algebraický tvar komplexní čísla z , jestliže

(a) $z = \ln(1 - i)$;

(b) $z = \ln(-1 - \sqrt{3}i)$;

(c) $z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$;

(d) $z = \cos(2 - 4i)$.

7. V oboru komplexních čísel řešte

(a) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$;

(b) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$;

(c) $\cos z = 4$;

(d) $\sin z = \cos z$;

8. Necht' $a \in \mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ položme

$$M_a(z) = e^{a \operatorname{Ln} z} = \left\{ e^{a(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

($M_a(z)$ se nazývá a -tá mocnina čísla z .)

(a) Nalezněte $M_{\frac{1}{2}}(i)$ a $M_i(i)$.

(b) Uvažme komplexní funkci $m_a(z) = e^{a \ln z}$ ($m_a(z)$ je hlavní hodnota a -té mocniny). Nalezněte $m_{\frac{1}{2}}(i)$ a $m_i(i)$. Vypočtěte derivaci funkce $m_a(z)$ na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}.$$

9. Ukažte, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $z \in \mathbb{C}$ je $(e^z)^n = e^{nz}$.

10. Ukažte, že obecně neplatí rovnost $m_a(e^z) = e^{az}$, kde $a, z \in \mathbb{C}$. (Návod: Zkuste hodnoty $m_a(e^z)$ a e^{az} například pro $z = 2\pi i$ a $a = \frac{1}{2}$.)

Výsledky

3. $|z| = e^{-7\pi}$.
4. $w = e^{\pi-2i}$.
5. Číslo w leží v druhém kvadrantu.
6. (a) $\ln(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$;
(b) $\ln(-1-\sqrt{3}i) = \ln 2 - \frac{2\pi i}{3}$;
(c) $\sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2) = \frac{5}{4}$;
(d) $\cos(2-4i) = \cosh(4) \cos 2 + i \sinh 4 \sin 2$.
7. (a) $z = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$;
(b) $z = \pm\frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(c) $z = -i \ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
(d) $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$;
8. (a) $M_{\frac{1}{2}}(i) = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}\}$ a $M_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(b) $m_{\frac{1}{2}}(i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $m_i(i) = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m'_a(z) = am_{a-1}(z)$.