Křivkový integrál

Zadání

1. Je dána funkce $f(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Je dána funkce $f(t) = \frac{1}{t-i}$, $t \in \mathbb{R}$. Vypočtěte $f'(t)$ a $\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Nalezněte parametrizaci kladně orientované hranice trojúhelníku o vrcholech 0, $1-i$ a 2.

4. Z definice vypočtěte $\int_C 3\mathrm{Im}\,z - 2\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1+i$ a koncovým bodem i.

5. Z definice vypočtěte $\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde $2 \in C$ a C je půlkružnice se středem v 0, poloměrem 2, počátečním bodem $-2i$, koncovým bodem $2i$.

6. Z definice vypočtěte $\int_C e^{z-\overline{z}}\,\mathrm{d}z$, kde C je úsečka s počátečním bodem $1+i\frac{\pi}{2}$ a koncovým bodem 1.

7. Z definice vypočtěte $\int_C \mathrm{Im}\,z\,\mathrm{d}z$, kde C je spojení úseček $[0, 1+i]$ a $[1+i, 2]$.

8. Z definice vypočtěte $\int_C \overline{z}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,z \geq 0, \mathrm{Im}\,z \leq 0, |z| \leq 2\}$.

9. Z definice vypočtěte $\int_C \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2.

10. Vypočtěte
$$\int_C \frac{\sin(z^2)}{z^{50}} + \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$$
kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1| = \frac{1}{2}$.

11. Vypočtěte
$$\int_C ze^z + \frac{3\,|z|}{z} - \overline{z}\,\mathrm{d}z$$
kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$.

12. Vypočtěte
$$\int_C \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z,$$
kde C je kladně orientovaná kružnice se středem $2i$ a poloměrem 1.

13. Vypočtěte
$$\int_C \frac{1}{z} + 2\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{d}z,$$
kde C je kladně orientovaná hranice množiny
$$M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,z \geq 1, |z-1| \leq 3\}\,.$$

Výsledky

1. $f'(t) = ie^{it}$ a $\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 2i$.
2. $f'(t) = -\frac{t^2+2it-1}{(t^2+1)^2}$ a $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.
3. Například
$$\varphi(t) = \begin{cases} (1-i)t, & t \in [0,1], \\ 1-i+(1+i)(t-1), & t \in (1,2], \\ 2-2(t-2), & t \in (2,3]. \end{cases}$$
4. -2.
5. $4\pi i$.
6. 1.
7. 1.
8. $-\frac{8}{3} + 8i$
9. 0.
10. $\frac{i\pi}{4}$.
11. $4\pi i$.
12. $\frac{\pi}{2}$.
13. -9π