Laurentovy řady, izolované singularity a rezidua

Zadání

1. Určete koeficienty u mocnin $(z-i)^{-10}$, $(z-i)^{-1}$, $(z-i)^1$ a $(z-i)^2$ v Laurentově řadě
$$\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} (z-i)^{3n+8}.$$

2. Nalezněte rozvoj funkce
$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$
do Laurentovy řady na co největším prstencovém okolí bodu 1 a toto okolí určete.

3. Nalezněte rozvoj funkce
$$f(z) = \frac{e^{3z-1}}{z^2}$$
do Laurentovy řady na co největším okolí nekonečna a toto okolí určete.

4. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$ do Laurentovy řady
   (a) na prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$;
   (b) na okolí bodu $z_0 = \infty$.

5. Rozložte funkci $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ do Laurentovy řady na mezikruží daném nerovnostmi $1 < |z| < 3$.

6. Určete typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z_0, jestliže
   (a) $f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{n^2+5n}{2^n}(z-3i)^{2n}$ na $P(3i)$ a $z_0 = 3i$;
   (b) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{3} \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{n+1}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$.

7. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$, jestliže
   (a) $f(z) = \frac{z+i}{z^4+2z^2+1}$;
   (b) $f(z) = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{z}}$;
   (c) $f(z) = \frac{1}{z^5(2-\cos z)(z-3)}$.

8. Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0, jestliže
   (a) $f(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n-2}} (z+1)^{n-7}$ na $P(-1)$ a $z_0 = -1$;
   (b) $f(z) = \sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{(-6)^n}{n!} (z-i)^{2n-4}$ na $P(i)$ a $z_0 = i$;
   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n^2-10}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$;
   (d) $f(z) = \sum_{n=-10}^{+\infty} \frac{n+2}{2^n} z^{n^2-n-3}$ na $P(0)$ a $z_0 = 0$.

9. Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$ a spočtěte v nich reziduum, jestliže

   (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}$;

   (b) $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$;

   (c) $f(z) = \frac{z+1}{1-e^{2\pi i z}}$;

   (d) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$;

   (e) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z(2\pi-z)^3}$;

   (f) $f(z) = \frac{1}{\sin z+\cos z}$.

10. Nalezněte hlavní část Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^5}$ na prstencovém okolí bodu 0 a určete $\operatorname{res}_0 f(z)$.

11. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1}{z^8 - 4z^6}.$$

   (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.

   (b) Vyšetřete všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkce $f(z)$.

   (c) Vypočtěte rezidua ve všech izolovaných singularitách.

12. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)^2}.$$

   (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$ a toto okolí určete.

   (b) Klasifikujte všechny izolované singularity (v $\mathbb{C}$) funkcí
$$g(z) = \frac{1}{z^{20}} f(z) \qquad \text{a} \qquad h(z) = \frac{1}{z^{20}} + f(z).$$
   Dále nalezněte reziduum funkcí $g(z)$ a $h(z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Výsledky

1. Ať a_n je koeficient u $(z-i)^n$. Pak $a_{-10}=0$, $a_{-1}=-8$, $a_1=0$ a $a_2=0$.
2. $\sum_{n=-3}^{+\infty} \frac{2^{n+3}e^2}{(n+3)!}(z-1)^n$ pro $0<|z-1|$.
3. $\sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{3^{n+2}e^{-1}}{(n+2)!} z^n$ pro $0<|z|$.
4. (a) $f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n$ pro $0<|z-1|<1$.
   (b) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3}$ pro $|z|>1$.
5. $f(z)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{z^{n+1}}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ pro $1<|z|<3$.
6. (a) Pól řádu -8;
   (b) Podstatná singularita.
7. (a) $-i$ je jednoduchý pól, i je dvojnásobný pól;
   (b) $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, jsou póly řádu 2;
   (c) 0 pětinásobný pól, 3 jednoduchý pól a $2k\pi \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, kde $k\in\mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly.
8. (a) $\operatorname{res}_{-1} f(z)=\frac{4}{9}$;
   (b) $\operatorname{res}_{i} f(z)=0$;
   (c) $\operatorname{res}_{0} f(z)=-\frac{1}{4}$;
   (d) $\operatorname{res}_{0} f(z)=3$.
9. (a) 0 je pól řadu 2, π je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z)=\operatorname{res}_\pi f(z)=-\frac{1}{\pi^2}$;
   (b) 0 je pól řadu 2, -2 a 1 jsou póly řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z)=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{res}_{-2} f(z)=\frac{1}{12}$ a $\operatorname{res}_1 f(z)=\frac{2}{3}$;
   (c) $z=-1$ je odstranitelná singularita, $z=k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ je pól řádu 1, $\operatorname{res}_{-1} f(z)=0$ a $\operatorname{res}_k f(z)=\frac{k+1}{-2\pi i}$;
   (d) $z=0$ je pól řádu 2, $z=k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z)=0$ a $\operatorname{res}_{k\pi} f(z)=\frac{(-1)^k}{k\pi}$;
   (e) 0 je odstranitelná singularita, 2π je pól řádu 1, $\operatorname{res}_0 f(z)=0$ a $\operatorname{res}_{2\pi} f(z)=\frac{1}{2\pi}$;
   (f) $z_k=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, jsou jednoduché póly, $\operatorname{res}_{z_k}=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$.
10. Hlavní část je $\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}$; $\operatorname{res}_0 f(z)=0$.
11. (a) $f(z)=\sum_{n=-3}^{\infty}-\frac{z^{2n}}{4^{n+4}}$ pro $0<|z|<2$.
    (b) 0 je pól řádu 6 a ± 2 jsou póly řádu 1.
    (c) $\operatorname{res}_{-2} f(z)=-\frac{1}{2^8}$, $\operatorname{res}_0 f(z)=0$, $\operatorname{res}_2 f(z)=\frac{1}{2^8}$.
12. (a) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)z^n$ pro $0<|z|<1$.
    (b) Funkce g má v 0 pól řádu 21 a v 1 pól řádu 2, funkce h má v 0 pól řádu 20 a v 1 pól řádu 2, $\operatorname{res}_0 g(z)=41$ a $\operatorname{res}_0 h(z)=1$.