

Reziduová věta a její aplikace

Zadání

1. Vypočtěte

(a)

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^2(z + 2)} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 3$;

(b)

$$\int_C \frac{2z - 1}{z^2(z^3 + 1)} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $2 - \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} + i$ a $2 + i$;

(c)

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = 3$.

2. Vypočtěte

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx;$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

3. Vypočtěte

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx;$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^2 + 7) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx;$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4 + 4} dx.$$

Výsledky

- (a) $2\pi i$;

(b) $\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 3i \right)$;

(c) $8\pi i$.
- (a) $\frac{\pi}{4}$;

(b) $\sqrt{2}\pi$;

(c) $\frac{3\pi}{8}$.
- (a) $-\frac{\pi}{8e^2} \left(\frac{1}{3e^4} - 1 \right)$;

(b) $\frac{\pi}{2} e^{-1} (2 \sin 1 + \cos 1)$;

(c) $\frac{\pi}{3} \left(\frac{5}{e} + \frac{1}{2e^2} \right)$;

(d) $-\frac{\pi}{4e^\pi}$.