

# Komplexní analýza

Písemná část zkoušky (16.02.2023)

Jméno a příjmení: .....  
Identifikační číslo: 01

Podpis: .....

## Body

Úloha	vstupní test				početní část				$\Sigma$	
	1	2	3	4	$\Sigma_1$	1	2	3	4	$\Sigma_2$
Body										

## Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno a příjmení“ a podepište se. To samé provedete na listu se vstupním testem.
- Poznamenejte si Vaše identifikační číslo. Pod tímto číslem bude na Moodle zveřejněn Váš bodový zisk.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte. Každý papír, který budete odevzdávat, čitelně podepište.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- První se píše vstupní test, který bude po 10 minutách vybrán.

## Soupis vybraných vzorců

### Laplaceova transformace

#### Součtové vzorce

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$  pro každé  $z, w \in \mathbb{C}$ .
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$  pro každé  $z, w \in \mathbb{C}$ .

#### Rozvoje

- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}$ .
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}$ .
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$  pro  $|z-1| < 1$ .

#### Fourierova transformace

- Pro  $a > 0$  je  $\mathcal{F} \left[ e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ .
- Pro  $a \in \mathbb{R}$ :  $\mathcal{F} [f(t-a)] (\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F} [f(t)] (\omega)$ .
- Pro  $a \in \mathbb{R}$  je  $\mathcal{F} [e^{iat} f(t)] (\omega) = \mathcal{F} [f(t)] (\omega - a)$ .
- Pro  $0 \neq a \in \mathbb{R}$ :  $\mathcal{F} [f(at)] (\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} [f(t)] \left( \frac{\omega}{a} \right)$ .

- Pro  $n \in \mathbb{N}_0$  je  $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ . Speciálně  $\mathcal{L} [1] (s) = \frac{1}{s}$ .
- Pro  $a \in \mathbb{C}$  je  $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$ .
- Pro  $\omega \in \mathbb{C}$  je  $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  a  $\mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ .
- Pro  $a > 0$  kladné reálné platí  $\mathcal{L} [f(t) \mathbf{1}(t-a)] (s) = e^{-as} \mathcal{L} [f(t+a)] (s)$ .
- Pro  $a \in \mathbb{C}$  je  $\mathcal{L} [e^{at} f(t)] (s) = \mathcal{L} [f(t)] (s-a)$ .
- Pro  $a > 0$ :  $\mathcal{L} [f(at)] (s) = \frac{1}{a} \mathcal{L} [f(t)] \left( \frac{s}{a} \right)$ .

#### $\mathcal{Z}$ -transformace

- Pro  $\alpha \in \mathbb{C}$  je  $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$ . Speciálně  $\mathcal{Z} [1] (z) = \frac{z}{z-1}$ .
- Pro  $\alpha \in \mathbb{C}$  je  $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$  a  $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ .
- $\mathcal{Z} [n] (z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ .
- Pro  $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ :  $\mathcal{Z} [\alpha^n a_n] (z) = \mathcal{Z} [a_n] \left( \frac{z}{\alpha} \right)$ .

## Početní část

- Veškeré své odpovědi zdůvodněte.
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.

**Úloha 1** ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují). Mějme funkci

$$u(x, y) = e^{2y} \cos(\alpha x) + 2x^3y + \beta xy^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  jsou parametry.

- Určete všechny hodnoty parametrů  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  takové, že  $u(x, y)$  je harmonická funkce na  $\mathbb{R}^2$ .
- Pro  $\alpha = 2$  a  $\beta = -2$  nalezněte funkci  $v(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  je celistvá funkce a platí  $f(2i) = e^4$ .

**Úloha 2** ([10 bodů]). Spočtěte

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2 + 25} + \frac{e^{\pi z} + 1}{(z^2 + 1)^2} dz,$$

kde  $C$  je kladně orientovaná kružnice o rovnici  $|z - 2i| = 2$ .

**Úloha 3** ([10 bodů], podúlohy na sebe NEnavazují).

- Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \frac{t - 2 + i}{(t^2 - 4t + 5)^2}.$$

- Určete

$$\mathcal{F} \left[ \left( e^{-4(t+5)^2} \right)''' \right] (\omega).$$

- Nalezněte spojitou funkci  $g(t) \in L^1(\mathbb{R})$  takovou, pro kterou platí

$$\mathcal{F} \left[ g(t) * \frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-2|\omega|}.$$

[Ná pověda: Využijte skutečnosti, že  $\mathcal{F} \left[ \frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ .]

**Úloha 4** ([10 bodů]). Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$$

splňující počáteční podmínky  $y(0) = 1$  a  $y'(0) = 0$ .

$$1) a) \frac{\partial M}{\partial x} = -\lambda e^{2y} \sin(\lambda x) + 6x^2y + \beta y^3$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\lambda^2 e^{2y} \cos(\lambda x) + 12xy$$

$$\cancel{b) \frac{\partial M}{\partial y} = 2\lambda e^{2y} \cos(\lambda x) + 2x^3 + 3\beta xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 4e^{2y} \cos(\lambda x) + 6\beta xy$$

$$\Delta M = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow -\lambda^2 e^{2y} \cos(\lambda x) + 12xy + 4e^{2y} \cos(\lambda x) + 6\beta xy = 0 \quad \cancel{\forall x,y \in \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda^2)e^{2y} \cos(\lambda x) + (12+6\beta)xy = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda = \pm 2 \\ \beta = -2 \end{array}}$$

$$b) \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x} = -2e^{2y} \sin(2x) + 6x^2y - 2y^3$$

$$N(x,y) = \int -2e^{2y} \sin(2x) + 6x^2y - 2y^3 dy = -e^{2y} \sin(2x) + 3x^2y^2 - \frac{y^4}{2} + C(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial y} = -2e^{2y} \cos(2x) - 2x^3 + 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2e^{2y} \cos(2x) + 6xy^2 + C'(x)$$

$$C'(x) = -2x^3 \Rightarrow C(x) = \int -2x^3 dx = -\frac{x^4}{2} + K$$

feste  $K \in \mathbb{R}$

$$\boxed{N(x,y) = -e^{2y} \sin(2x) + 3x^2y^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{y^4}{2} + K}$$

$$f(2i) = M(0,2) + iN(0,2) = e^4$$

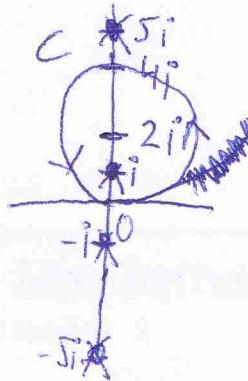
$$\therefore N(0,2) = 0$$

$$0 + 0 - 0 - 8 + K = 0 \Leftrightarrow \boxed{K=8}$$

$$2) \quad I := \int_C \frac{\sin z}{z^2+25} + \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2} dz$$

$$z^2+25=0 \Leftrightarrow z = \pm 5i$$

$$z^2+1=0 \Leftrightarrow z = \pm i$$



$\int_C \frac{\sin z}{z^2+25} dz = 0$  alle Cauchy'schen Integritätsätze, weil kein singulärer Punkt auf C.

$$\cdot I = \int_C \frac{e^{\pi z} + 1}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{\pi z} + 1}{(z^2+1)^2}$$

$$\cdot e^{\pi z} + 1 \Big|_{z=i} = e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$(e^{\pi z} + 1)' \Big|_{z=i} = \pi e^{\pi z} \Big|_{z=i} = -\pi \neq 0 \rightarrow \text{jedwakas obyknovenie ciagle}$$

$$\cdot (z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2 \quad \dots \quad i \text{ je dwukrotny koren jmenovatele}$$

$$\cdot \operatorname{res}_i \frac{e^{\pi z} + 1}{(z^2+1)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{\pi z} + 1}{(z+i)^2(z-i)} = \underset{\text{jednako jst}}{\lim_{z \rightarrow i}} \frac{\pi e^{\pi z}}{2(z+i)(z-i) + (z+i)^2} =$$

$$= \frac{-\pi}{(2i)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2\pi i \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} i}$$

$$3) \text{ a) } f(\lambda) = \frac{\lambda - 2 + i}{(\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2} = \frac{1}{(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = -1$$

$$\lambda = 2 \pm i$$

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)} dt$$

$$w \geq 0: \quad \Gamma - w \leq 0$$

$$f(w) = -2\pi i \operatorname{Res}_{2+i} \frac{e^{-i\omega z}}{(\lambda - 2 - i)^2 (\lambda - 2 + i)} = -2\pi i \frac{e^{-w-2iw}}{(-2i)^2} = \frac{\pi}{2} i e^{-w-2iw}$$

$$w < 0: \quad \Gamma - w \geq 0$$

$$f(w) = 2\pi i \operatorname{Res}_{2+i} \frac{e^{-i\omega z}}{(\lambda - 2 - i)^2 (\lambda - 2 + i)} \stackrel{\text{pol } 2-i \text{ in } z}{=} 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2+i} \left( \frac{e^{-i\omega z}}{\lambda - 2 + i} \right)^{(2)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{-i\omega e^{-i\omega z} (2i) - e^{-i\omega z}}{(2i)^2} = \frac{\pi}{2} i (2w-1) e^{w-2iw}$$

$$f(w) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} i e^{-w-2iw} & \dots w \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} i (2w-1) e^{w-2iw} & \dots w < 0 \end{cases}$$

$$b) \mathcal{F}[(e^{-4(\lambda+5)^2})''](w) = (iw)^3 \mathcal{F}[e^{-4(\lambda+5)^2}](w) = -iw^3 e^{5iw} \mathcal{F}[e^{-4\lambda^2}](w)$$

$$= -iw^3 e^{5iw} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{w^2}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2} w^3 i e^{-\frac{w^2}{16} + 5iw}}$$

$$c) \mathcal{F}[g(\lambda) * \frac{1}{1+\lambda^2}](w) = \hat{g}(w) \pi e^{-lw}$$

$$\hat{g}(w) \pi e^{-lw} = \pi e^{-2lw} \Rightarrow \hat{g}(w) = \pi e^{-lw}$$

$$\boxed{g(\lambda) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-lw}](\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2}}$$

$$4) Y''(s) + Y'(s) - 2Y(s) = e^s \quad | \quad Y(0) = 1, Y'(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) - s + s Y(s) - 1 - 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s^2 + s - 2) Y(s) = \frac{1}{s-1} + s + 1$$

$$s^2 + s - 2 = (s+2)(s-1)$$

$$(s+2)(s-1) Y(s) = \frac{s^2}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2(s+2)}$$

$$Y(s) = \text{res}_1 \frac{s^2}{(s-1)^2(s+2)} e^{st} + \text{res}_2 \frac{s^2}{(s-1)^2(s+2)} e^{st}$$

$$\text{res}_2 \frac{s^2}{(s-1)^2(s+2)} e^{st} = \frac{4}{(-3)^2} e^{-2s} = \frac{4}{9} e^{-2s}$$

$$\text{res}_1 \frac{s^2}{(s-1)^2(s+2)} e^{st} \stackrel{\text{pol. 2. rück}}{=} \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{s^2 e^{st}}{s+2} \right)' = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(2s e^{st} + s^2 e^{st})(s+2) - s^2 e^{st}}{(s+2)^2} =$$

$$= \frac{6e^{-s} + 3se^{-s} - e^{-s}}{9} = \frac{5}{9} e^{-s} + \frac{1}{3} e^{-s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{4}{9} e^{-2s} + \frac{5}{9} e^{-s} + \frac{1}{3} e^{-s}}$$