Mocninné řady

Zadání

1. Vypočtěte
   (a) $\lim_{n\to\infty} i^n n$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3ni}{1+in}$.
2. Pomocí podílového nebo odmocninového kritéria rozhodněte, zda uvedené číselné řady konvergují absolutně nebo divergují:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$;
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (3-4i)^n$.
3. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$
4. Nalezněte poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}(z-i)^{2n}$.
5. Určete poloměr konvergence a v kruhu konvergence součet mocninné řady
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{n+1}$;
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n}$;
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(z-2i)^n$;
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n$;
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n$;
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^{n+1}(n+3)}$.
6. Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady v okolí bodu z_0 a nalezněte kruh konvergence této řady, jestliže
   (a) $f(z) = \sin z$ a $z_0 = 0$;
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$ a $z_0 = 1+i$;
   (c) $f(z) = \frac{1}{3z-2}$ a $z_0 = 1$;
   (d) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a $z_0 = i$;
   (e) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ a $z_0 = 0$;
   (f) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$ a $z_0 = 0$;
   (g) $f(z) = z^2$ a $z_0 = 1$;
   (h) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ a $z_0 = 1$;
   (i) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ a $z_0 = 0$.
   (j) $f(z) = \frac{2-3z}{z^3-2z^2}$ a $z_0 = 1$;
   (k) $f(z) = \cos^2 z$ a $z_0 = 0$;

7. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{3z+5}{z^2(z+1)}.$$

   (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete poloměr konvergence této řady.

   (b) Nalezněte rozvoj funkce
$$g(z) = f'(z) + 2 + z + z^2$$
   do mocninné řady se středem v bodě -2 a určete její poloměr konvergence.

8. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice
$$(z-1)f'(z) + f(z) = 0$$
   splňující počáteční podmínku $f(0) = 1$.

9. Pomocí mocninných řad nalezněte v okolí bodu 0 řešení rovnice
$$(z^2+1)f''(z) - 4zf'(z) + 6f(z) = 0$$
   splňující počáteční podmínky $f(0) = 1$ a $f'(0) = -1$.

Výsledky

1. (a) ∞.
   (b) $-3-2i$.
2. (a) konverguje absolutně.
   (b) diverguje.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
4. $R = \sqrt{3}$.
5. (a) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n = ze^{-z}$;
   (b) $R = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} z^{2n} = (1+2z^2)e^{z^2}$;
   (c) $R = 3$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(z-2i)^n = -\ln(3+2i-z) + \ln 3$;
   (d) $R = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$;
   (e) $R = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n = \ln(2+z) - \ln 2$;
   (f) $R = 4$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{4^n(n+3)} = -\frac{z^2}{2} - 4z - 16\ln(4-z) + 16\ln 4$.
6. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ pro $z \in \mathbb{C}$;
   (b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-1-i)^n$ pro $|z-1-i| < \sqrt{2}$;
   (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n (z-1)^n$ pro $|z-1| < \frac{1}{3}$;
   (d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[i^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \right] (z-i)^n$ pro $|z-i| < 1$;
   (e) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ pro $|z| < 1$;
   (f) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}$ pro $|z| < 1$;
   (g) $f(z) = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$ pro $z \in \mathbb{C}$;
   (h) $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$;
   (i) $f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$ pro $|z| < 1$;
   (j) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (-1)^n n\right] (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$;
   (k) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} z^{2n}$ pro $z \in \mathbb{C}$.
7. (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+9}{2^{n+2}} - 2\right] (z+2)^n$ pro $|z+2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$);
   (b) $g(z) = (z+2)^2 - 3(z+2) + 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{5n+14}{2^{n+3}} - 2\right] (n+1)(z+2)^n$ pro $|z+2| < 1$ (poloměr konvergence je tedy $R = 1$).
8. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$.
9. $f(z) = 1 - z - 3z^2 + \frac{1}{3}z^3$ pro $z \in \mathbb{C}$.