Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta A)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\frac{-1+2i}{2-i}.$$

Reálná část: _____

Imaginární část: _____

Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Určete velikost komplexního čísla

$$\frac{1}{e^{\overline{-1+5i}}}.$$

Velikost: _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete koeficient u $(z-8)^8$ v

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-8)^{n+10}.$$

Koeficient: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} 2^{-n}(z-9)^{n+10},\ z \in P(9),$$

v bodě $z = 9$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: _____

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

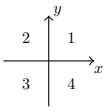
Vstupní test (varianta B)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$e^{98-\frac{6}{9}\pi i}.$$

Kvadrant: _____



Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Vyjádřete funkci

$$f(z) = \sin(-5iz),\ z \in \mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

$f(z) =$ _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10}.$$

Střed: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Určete reziduum funkce

$$f(z) = \sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-7)^{2n+10},\ z \in P(7),$$

v bodě $z = 7$.

$\operatorname{res}_7 f(z) =$ _____

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta C)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$e^{(-1+2i)^2}.$$

Reálná část: _____

Imaginární část: _____

Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Určete velikost komplexního čísla

$$e^{-2+8i}e^{8-9i}.$$

Velikost: _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete koeficient u $(z+9)^8$ v

$$\sum_{n=3}^{\infty} 4^n (z+9)^{3n+2}.$$

Koeficient: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \sum_{n=8}^{\infty} 3^n (z-8)^{2n-20}, \ z \in P(8),$$

v bodě $z = 8$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: _____

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

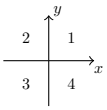
Vstupní test (varianta D)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$(-5+4i)^2 - 11.$$

Kvadrant: _____



Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Vyjádřete funkci

$$f(z) = \cos(5z+i),\ z \in \mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

$f(z) =$ _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=10}^{\infty} 3^{n^2}(6z+8)^{n+10}.$$

Střed: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Určete reziduum funkce

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n (z-2)^{3n-13},\ z \in P(2),$$

v bodě $z = 2$.

$\operatorname{res}_2 f(z) =$ _____

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

Vstupní test (varianta E)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\ln(-5i).$$

Reálná část: _____

Imaginární část: _____

Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Určete velikost komplexního čísla

$$\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}}.$$

Velikost: _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete koeficient u $(z-6)^{-3}$ v

$$\sum_{n=-6}^{\infty} n^2 (z-6)^{2n+1}.$$

Koeficient: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+2)^{-n}, \ z \in P(-2),$$

v bodě $z = -2$. Jedná se o odstranitelnou singularitu, pól, nebo podstatnou singularitu? V případě pólu určete také jeho řád.

Typ: _____

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....
Identifikační číslo: 123456789

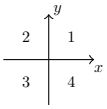
Vstupní test (varianta F)

- Na vstupní test je **časový limit 10 minut**. Poté bude vybrán.
- **Odpovědi na otázky zapište do příslušné kolonky.** Pokud bude kolonka prázdná nebo obsahovat nejednoznačnou odpověď, bude příslušná otázka hodnocena 0 body.
- Odpovědi na vstupní otázky je třeba podložit výpočty či obrázkem.

Vstupní otázka 1 ([2 body])**.** Určete, v jakém kvadrantu se nachází komplexní číslo

$$86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right).$$

Kvadrant: _____



Vstupní otázka 2 ([3 body])**.** Vyjádřete funkci

$$f(z)=9\cos(16)+9i\sin(16),\ z\in\mathbb{C},$$

pomocí exponenciální funkce.

$f(z)=$ _____

Vstupní otázka 3 ([2 body])**.** Určete střed mocninné řady (v komplexní proměnné z)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-5z-10)^{6n+9}.$$

Střed: _____

Vstupní otázka 4 ([3 body])**.** Určete reziduum funkce

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{6}(n+8)(z+5)^{-n+1},\ z\in P(-5),$$

v bodě $z=-5$.

$\operatorname{res}_{-5} f(z)=$ _____

Řešení varianty A

1) Usměrníme zlomek, abychom získali:

$$\frac{-1+2i}{2-i} = \frac{-1+2i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{-4+3i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Tedy $\operatorname{Re}\frac{-1+2i}{2-i} = -\frac{4}{5}$ a $\operatorname{Im}\frac{-1+2i}{2-i} = \frac{3}{5}$.

2) Jest

$$\frac{1}{e^{\overline{-1+5i}}} = \frac{1}{e^{-1-5i}} = e^{1+5i} = e(\cos 5 + i\sin 5).$$

Tedy $|\frac{1}{e^{\overline{-1+5i}}}| = |e(\cos 5 + i\sin 5)| = e|(\cos 5 + i\sin 5)| = e$.

3) $n + 10 = 8$ právě když $n = -2$. Koeficient u $(z-8)^8$ v

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-8)^{n+10}.$$

je tedy $2^{-(-2)} = 4$.

4) Řada

$$\sum_{n=-2}^{\infty} 2^{-n}(z-9)^{n+10}$$

obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z-9)$, neboť $n + 10 \geq 8$ pro $n \geq -2$. Jedná se tedy o odstranitelnou singularitu.

Řešení varianty B

1) Protože $-\pi < -\frac{2}{3}\pi < -\frac{\pi}{2}$ a

$$e^{98-\frac{6}{9}\pi i} = 98\left(\cos\left(-\frac{6}{9}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{6}{9}\pi\right)\right) = 98\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right),$$

což je goniometrický tvar komplexního čísla, leží $e^{98-\frac{6}{9}\pi i}$ ve 3. kvadrantu.

2) Jest

$$f(z) = \sin(-5iz) = \frac{e^{i(-5iz)} - e^{-i(-5iz)}}{2i} = \frac{e^{5z} - e^{-5z}}{2i}.$$

3) Střed mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10}.$$

je 4, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2z+8)^{n+10} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(-2)^{n+10}(z-4)^{n+10}.$$

4) Faktor $(z-7)^{-1}$ se v Laurentově řadě

$$\sum_{n=-50}^{\infty} 2^{-n}(z-7)^{2n+10}$$

nevyskytuje, neboť $2n+10 = -1$ právě tehdy, když $n = -\frac{11}{2}$. Tedy $\operatorname{res}_7 f(z) = 0$.

Řešení varianty C

1) Jest
$$(-1+2i)^2 = -3-4i,$$
takže
$$e^{(-1+2i)^2} = e^{-3-4i} = e^{-3}(\cos(-4) + i\sin(-4)).$$
Tedy $\operatorname{Re} e^{(-1+2i)^2} = e^{-3}\cos(-4)$ a $\operatorname{Im} e^{(-1+2i)^2} = e^{-3}\sin(-4)$.

2) Protože
$$e^{-2+8i}e^{8-9i} = e^{6-i} = e^6(\cos(-1) + i\sin(-1)),$$
je $|e^{-2+8i}e^{8-9i}| = e^6|\cos(-1) + i\sin(-1)| = e^6$.

3) Protože $3n+2 = 8$ právě tehdy, když $n = 2$, ale mocninná řada
$$\sum_{n=3}^{\infty} 4^n (z+9)^{3n+2}$$
je indexovaná až od $n = 3$, faktor $(z+9)^8$ se v řadě nevyskytuje. Koeficient u $(z+9)^8$ je tedy 0.

4) Řada
$$\sum_{n=8}^{\infty} 3^n (z-8)^{2n-20}$$
obsahuje konečně mnoho indexů n, pro které je exponent v $(z-8)^{2n-20}$ záporný. Nejmenší takový exponent je -4, neboť $2n-20|_{n=8} = -4$. Jedná se tedy o pól řádu 4.

Řešení varianty D

1) Jest
$$(-5+4i)^2-11=9-40i-11=-2-40i,$$
tedy $\operatorname{Re}\left((-5+4i)^2-11\right)<0$ a $\operatorname{Im}\left((-5+4i)^2-11\right)<0$. Číslo $(-5+4i)^2-11$ tedy leží ve 3. kvadrantu.

2) Z definice funkce cos máme
$$\cos(5z+i)=\frac{e^{i(5z+i)}+e^{-i(5z+i)}}{2}=\frac{e^{5iz-1}+e^{1-5iz}}{2}.$$

3) Protože
$$\sum_{n=10}^{\infty}3^{n^2}(6z+8)^{n+10}=\sum_{n=10}^{\infty}3^{n^2}6^{n+10}\left(z-\left(-\frac{8}{6}\right)\right)^{n+10},$$
střed této mocninné řady je $-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$.

4) Jest $3n-13=-1$ právě tehdy, když $n=4$. Koeficient u $(z-2)^{-1}$ v Laurentově řadě
$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n(z-2)^{3n-13}$$
je tedy $2^n|_{n=4}=16$, takže $\operatorname{res}_2 f(z)=16$.

Řešení varianty E

1) Z definice hlavní hodnoty logaritmu je

$$\ln(-5i) = \ln|-5i| + i\arg(-5i) = \ln 5 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Tedy $\operatorname{Re}(\ln(-5i)) = \ln 5$ a $\operatorname{Im}(\ln(-5i)) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Jest

$$\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}} = -e^{-2+8i-(8-9i)} = -e^{-10+17i} = -e^{-10}(\cos 17 + i\sin 17),$$

tedy $\left|\frac{-e^{-2+8i}}{e^{8-9i}}\right| = e^{-10}|\cos 17 + i\sin 17| = e^{-10}$.

3) Platí $2n+1 = -3$ právě tehdy, když $n = -2$. Koeficient u $(z-6)^{-3}$ v

$$\sum_{n=-6}^{\infty} n^2(z-6)^{2n+1}$$

tedy je $n^2|_{n=-2} = (-2)^2 = 4$.

4) Laurentova řada

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+2)^{-n}$$

obsahuje nekonečně mnoho záporných mocnin $(z+2)$, neboť $-n < 0$ pro každé $n \geq 10$. Jedná se tedy o podstatnou singularitu.

Řešení varianty F

1) Číslo
$$86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right).$$
je v goniometrickém tvaru. Protože $\frac{\pi}{2}<\frac{8}{10}\pi=\frac{4}{5}\pi<\pi$, číslo $86\left(\cos\left(\frac{8}{10}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{10}\pi\right)\right)$ leží ve 2. kvadrantu.

2) Máme
$$9\cos(16)+9i\sin(16)=9(\cos(16)+i\sin(16))=e^{\ln 9}(\cos(16)+i\sin(16)).$$
Z definice exponenciální funkce tedy plyne $9\cos(16)+9i\sin(16)=e^{\ln 9+16i}$.

3) Jest
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-5z-10)^{6n+9}=\sum_{n=1}^{\infty} n(-5)^{6n+9}(z+2)^{6n+9}=\sum_{n=1}^{\infty} n(-5)^{6n+9}(z-(-2))^{6n+9}.$$
Střed je tedy -2.

4) Jest $-n+1=-1$ právě tehdy, když $n=2$. Koeficient u $(z+5)^{-1}$ v Laurentově řadě
$$\sum_{n=-\infty}^{6}(n+8)(z+5)^{-n+1}$$
je tedy $(n+8)|_{n=2}=10$. Takže $\operatorname{res}_{-5} f(z)=10$.