Komplexní analýza

Úvod

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Základní informace

Stránky předmětu:
https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01KAN

Věnujte pozornost pravidlům předmětu (viz stránky předmětu).

- Podmínky zápočtu upřesní cvičící. Ze zápočtů lze získat až 20 bodů ke zkoušce.
- Podmínky zkoušky viz Moodle. Včas se dobře seznamte s průběhem písemné zkoušky (koncept vstupního testu).

Obsah kurzu:

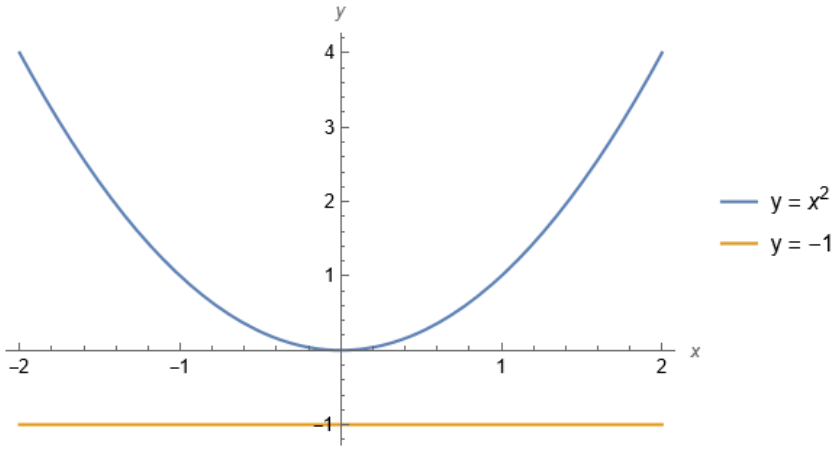
1. Komplexní analýza
2. Transformace
   i. Fourierova transformace (a Fourierovy řady)
   ii. Laplaceova transformace
   iii. Z-transformace

Upozornění

Pozor na mylný pocit pomalého začátku. Vše na sebe navazuje...

Motivace (řešení algebraických rovnic)

- Všichni víme, že rovnice $x^2 = -1$ nemá v oboru reálných čísel řešení.
- Můžeme sice říct, že řešením je imaginární prvek i splňující $i^2 = -1$, ale to může působit uměle:



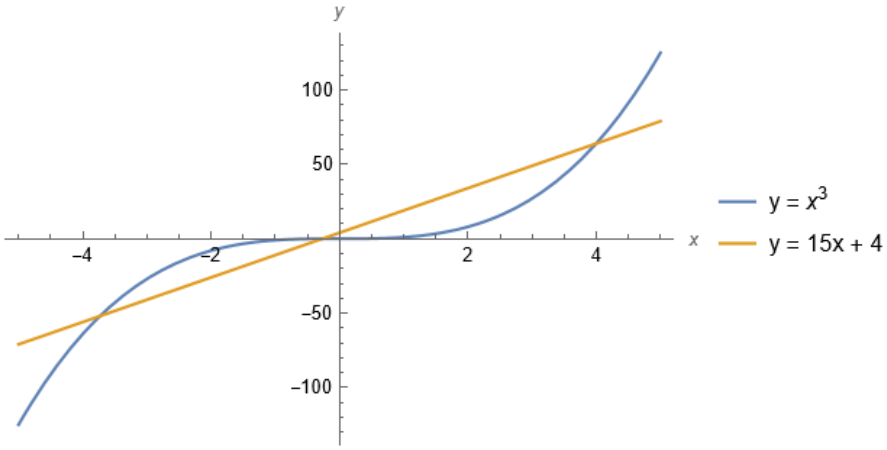
- Co ale např. kubická rovnice $x^3 = 15x + 4$?

Motivace (řešení algebraických rovnic, pokračování)

- Cardanovy vzorce pro řešení kubické rovnice $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

- Co když $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$? Např. pro $x^3 = 15x + 4$ to nastává, ale:



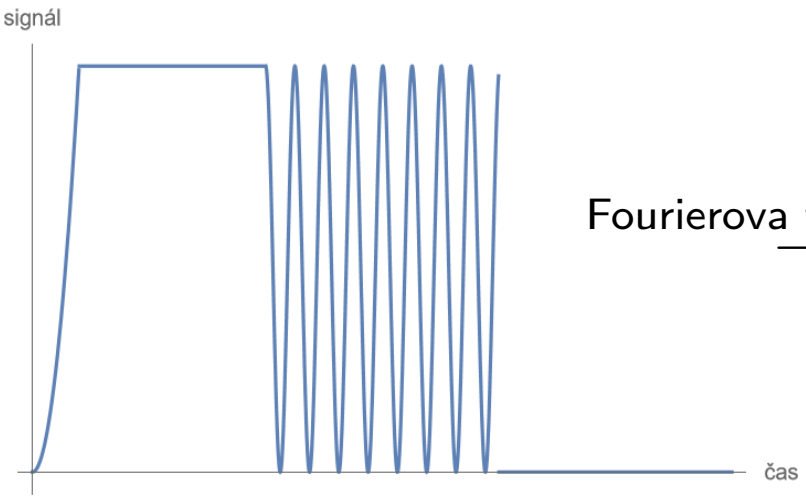
Poučení

Reálné problémy často vyžadují komplexní metody.

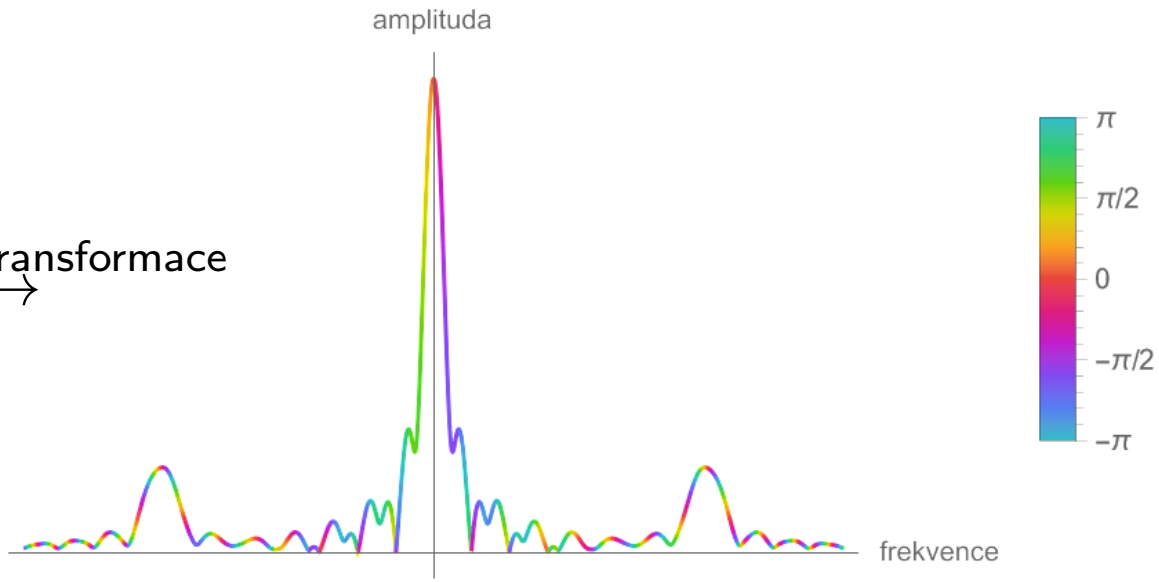
Motivace (zpracování signálu)

Otázka

Jak funguje aktivní potlačování okolního zvuku ve sluchátkách?



Fourierova transformace $\longrightarrow$



Kde lze potkat témata probíraná v kurzu?

- Matematika (výpočty integrálů, diferenciální rovnice, harmonická analýza, spektrální analýza, rovinná geometrie. . .)
- Fyzika
- Teorie obvodů
- Teorie signálů, zpracování a rozpoznávání obrazu, počítačové vidění
- Teorie řízení

$\vdots$

Komplexní čísla

Definice (neformální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu dvojčlenů $x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se kterými počítáme jako s reálnými dvojčleny za využití pravidla $i^2 = -1$.
Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

- Prvek i se nazývá **imaginární jednotka**.
- Terminologie a značení:
  - $z = x + iy$... **algebraický tvar** komplexního čísla z.
  - x... **reálná část** komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Re} z = x$.
  - y... **imaginární část** komplexního čísla z. Píšeme $\operatorname{Im} z = y$.
- Ztotožňujeme $x = x + 0i$ a $i = 1i$.

Upozornění

Reálná i imaginární část komplexního čísla jsou reálná čísla!

Definice (formální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ vybavenou operacemi

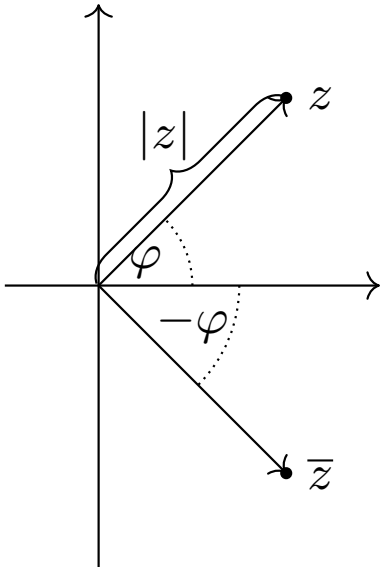
- sčítání: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobení: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

- Ztotožňujeme $x = (x, 0)$ a $i = (0, 1)$.
- Je třeba ověřit, že komplexní čísla mají všechny pěkné vlastnosti jako asociativita a komutativita násobení a sčítání, distributivita atd. a že skutečně rozšiřují při ztotožnění $x = (x, 0)$ operace sčítání a násobení reálných čísel.
- Vztah mezi neformální a formální definicí je $x + yi \cong (x, y)$.

Komplexní sdružení a absolutní hodnota

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. **Komplexně sdruženým číslem** k číslu z nazveme číslo $\bar{z} = x - iy$. **Absolutní hodnotou** (nebo také modulem či velikostí) komplexního čísla z rozumíme číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- $z \mapsto \bar{z}$... zrcadlení kolem reálné osy
- $z \mapsto |z|$... vzdálenost od počátku

- $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$. Navíc $|z| = 0$ právě tehdy, když $z = 0$.

Otázka

Jak vypadá inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ k z vůči násobení?

- Inverzní prvek z^{-1} je definován rovností $z^{-1}z = 1$, a proto:
  - pro $z = 0$ prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
  - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Příklad

Nechť $z = 5 - i$ a $w = 1 + 2i$. Potom $|z - w| = 5$, $\mathrm{Re}\,\frac{z}{w} = \frac{3}{5}$ a $\mathrm{Im}\,\frac{z}{w} = -\frac{11}{5}$.

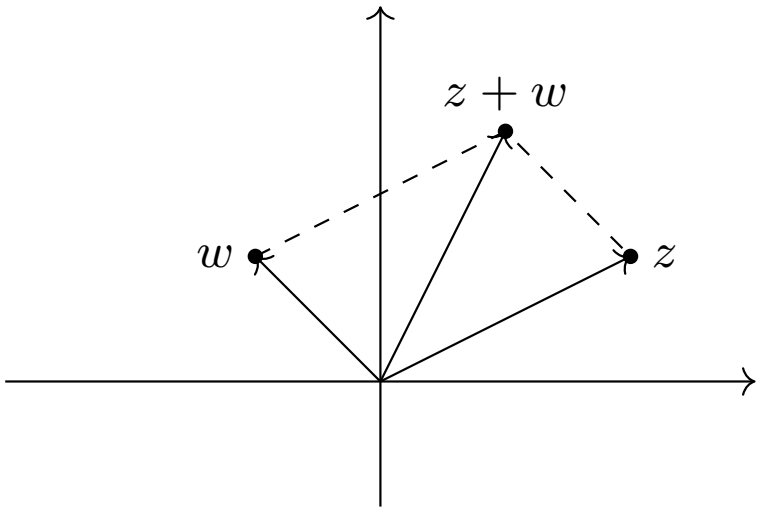
Základní identity

Tvrzení (Základní identity)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, kdykoli $w \neq 0$;
5. $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ a $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
6. $|z| = |\overline{z}|$;
7. $|zw| = |z|\,|w|$;
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, kdykoliv $w \neq 0$.

Geometrický význam sčítání a trojúhelníková nerovnost



- $z \mapsto z + w$... posun v rovině o vektor $w \in \mathbb{C}$

Tvrzení (trojúhelníková nerovnost)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

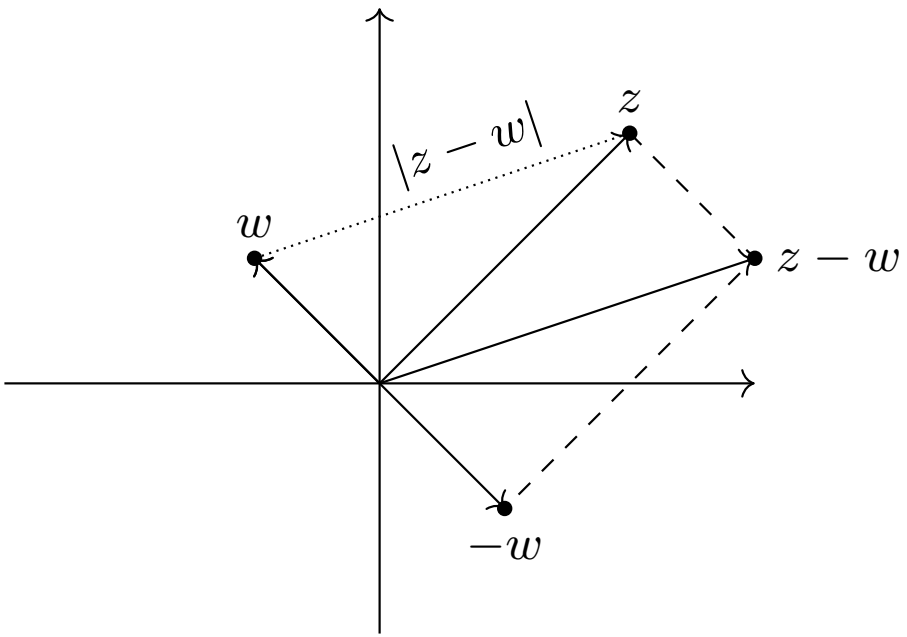
$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$

Upozornění

Na $\mathbb{C}$ nedefinujeme uspořádání a ani to nelze rozumně udělat!

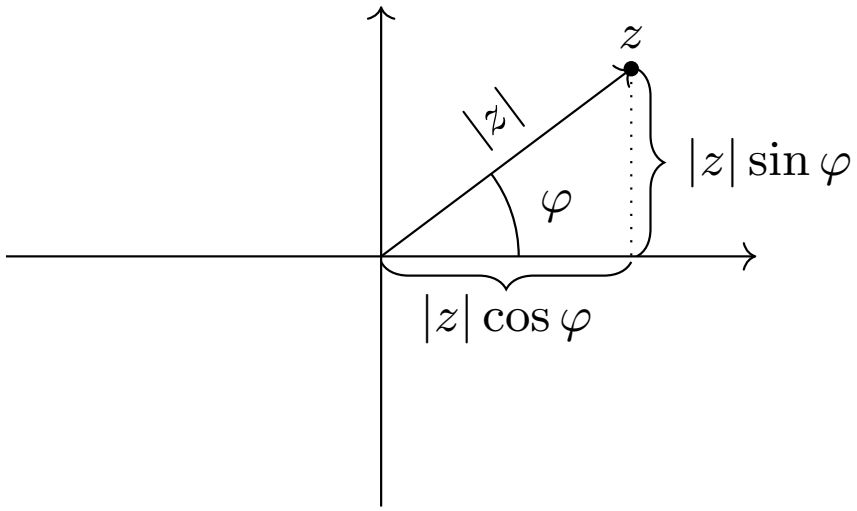
Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost bodů $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$ je $|z - w|$.



Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť z je nenulové komplexní číslo.



Z obrázku vidíme, že

$$z = |z| \left(\cos \varphi + i \sin \varphi \right),$$

což odpovídá bodu $(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)$ v rovinně (vzpomeňte si na polární souřadnice).

Pro $z \neq 0$ zavádíme následující terminologii a značení:

- $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$... **goniometrický tvar** komplexního čísla z.
- φ... **argument** komplexního čísla z.
- $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$... **množina všech argumentů** komplexního čísla z.
- $\varphi \in (\operatorname{Arg} z) \cap (-\pi, \pi]$ se nazývá **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z a značí se $\arg z$.

Příklad

Ať $z = -1 + i$. Pak $|z| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.

Hlavní hodnota argumentu komplexního čísla

Tvrzení

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Platí

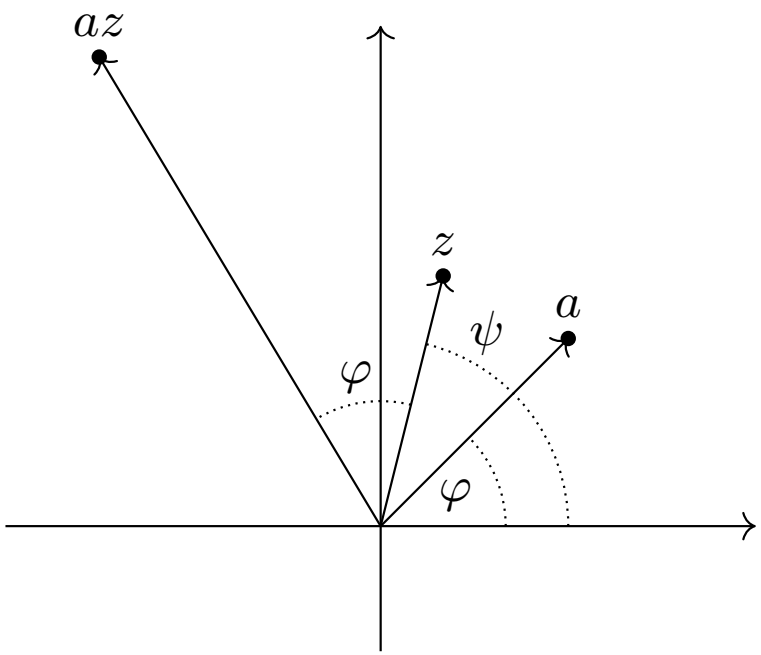
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{je-li } \operatorname{Re} z > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ a } \operatorname{Im} z > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } \operatorname{Re} z \leq 0 \text{ a } \operatorname{Im} z < 0; \\ \pi, & \text{je-li } \operatorname{Re} z < 0 \text{ a } \operatorname{Im} z = 0. \end{cases}$$

Důkaz: Viz cvičení. ■

Geometrický význam násobení

Nechť $a, z \neq 0$.

- $z \mapsto az$... otočení o úhel $\arg a$ a poté stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$.



- Speciálně, $z \mapsto iz$ odpovídá otočení o $\frac{\pi}{2}$ (proti směru hodinových ručiček).

Moivreova věta

Definujeme:

- $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -1$. Z Moivreovy věty plyne, že množina všech jejích řešení je

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) : k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$