Komplexní analýza

Laplaceova transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

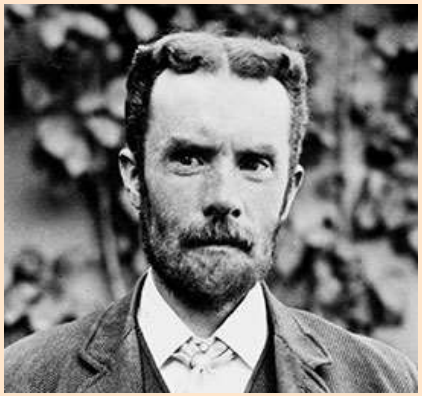
- Užitečný nástroj pro řešení diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních), které se objevují (mj.) v (elektro-)inženýrství.
  - Oliver Heaviside (1850 – 1925), teorie obvodů
- Na rozdíl od Fourierovy transformace zvládá počáteční podmínky a výrazně širší plejádu „pravých stran“.

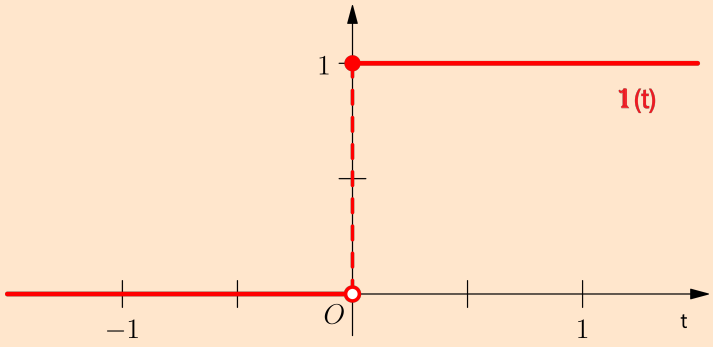
Definice

Funkce $\mathbb{1}(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0, & \text{pokud } t < 0, \end{cases}$$

se nazývá **Heavisideova funkce**. Někdy též jednotkový skok (v 0).





Definice Laplaceovy transformace

Definice

Laplaceova transformace funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je funkce $\mathscr{L}[f] = F$ definovaná pro $s \in \mathbb{C}$ předpisem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

konverguje-li tento integrál pro alespoň jedno $s \in \mathbb{C}$.

- $\mathscr{L}[f]$ je komplexní funkce komplexní proměnné.
- Z linearity integrálu plyne $\mathscr{L}[f+g] = \mathscr{L}[f] + \mathscr{L}[g]$ a $\mathscr{L}[\alpha f] = \alpha\mathscr{L}[f]$, kdykoliv existuje pravá strana.

Příklad

1. Nechť $a \in \mathbb{C}$. Potom $\mathscr{L}\left[e^{at}\right](s) = \frac{1}{s-a}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.
2. $\mathscr{L}\left[\mathbb{1}\right](s) = \frac{1}{s}$ pro každé $s \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} s > 0$.

Existence Laplaceovy transformace, prostor L_0

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je **po částech spojitá na intervalu** $[0,\infty)$, jestliže existují nepřekrývající se uzavřené intervaly $[a_j, b_j] \subseteq [0,\infty)$ takové, že $[0,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$ a:

- f je spojitá na každém otevřeném intervalu (a_j, b_j);
- $f(a_j^+) = \lim_{t\to a_j^+} f(t)$ existuje vlastní ve všech a_j,
  $f(b_j^-) = \lim_{t\to b_j^-} f(t)$ existuje vlastní ve všech b_j.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je **nejvýše exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ takové, že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pro každé $t \in [0,\infty)$. Číslo α nazýváme **index růstu** funkce f. Množinu všech po částech spojitých funkcí $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$, které jsou nejvýše exponenciálního řádu, značíme symbolem L_0.

- Je-li $f, g \in L_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak také $f + g, \alpha f, f \cdot g \in L_0$.

Příklad

1. 1 a t jsou v L_0. Tedy také všechny polynomy jsou v L_0.
2. $\sin t$ a $\cos t$ jsou v L_0. Obecněji, všechny omezené po částech spojité funkce na $[0, \infty)$ jsou v L_0.
3. $e^{at} \in L_0$ pro každé $a \in \mathbb{C}$.
4. e^{t^2} není v L_0.

Věta (O existenci Laplaceovy transformace)

Jestliže $f \in L_0$ má index růstu α, pak její Laplaceův obraz $\mathscr{L}[f(t)](s)$ existuje a je to holomorfní funkce na polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$.

- Nebudeme rozlišovat mezi funkcí $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ a funkcí, která vznikne z f dodefinováním 0 na $(-\infty, 0)$. Tedy, je-li $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak ji ztotožňujeme s funkcemi $f \cdot \mathbb{1}$ a $f \restriction_{[0,\infty)}$.

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

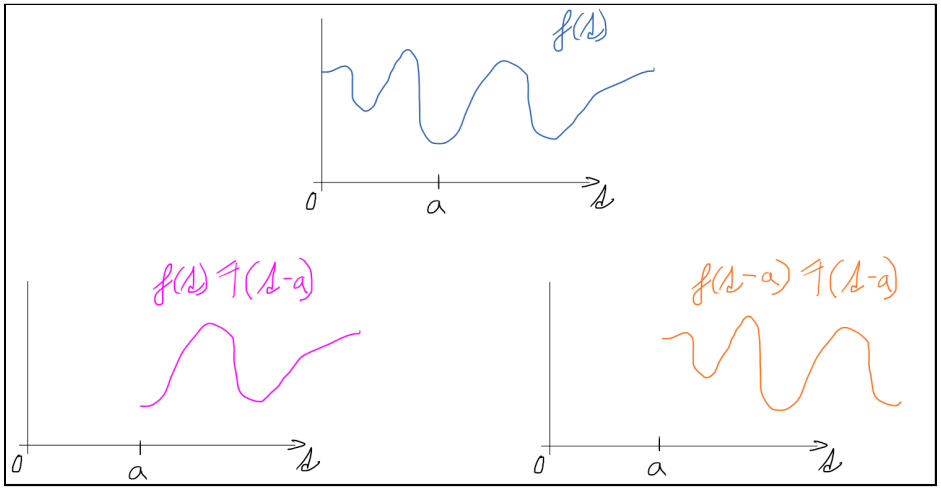
Tvrzení

Nechť $f \in L_0$.

1. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$.
2. Pro $a \in \mathbb{C}$ platí $\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \mathscr{L}[f(t)](s-a)$.
3. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}[f(t)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathscr{L}[f(t+a)](s)$.
4. Pro $a > 0$ platí $\mathscr{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathscr{L}[f(t)](s)$.

Důkaz: Viz přednáška (jen 3. bod, zbytek domácí cvičení) ■

- Ve 4. bodě využíváme naši úmluvu o ztotožnění f a $f \cdot \mathbb{1}$.



Příklad

1. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je

$$\mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{a} \quad \mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

2. $$\mathscr{L}\left[e^{-3it}\sin 2t\right](s) = \frac{2}{(s+3i)^2+4}.$$

3. Pro $a > 0$ je

$$\mathscr{L}\left[\mathbb{1}(t-a)\right](s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

4. $$\mathscr{L}\left[\mathbb{1}(t-2)e^{t}\right](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}.$$

Laplaceova transformace a derivace

Věta (O obrazu derivace)

Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L_0$, pak
$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathscr{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $f \in L_0$, pak

$$\mathscr{L}\left[t f(t)\right](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

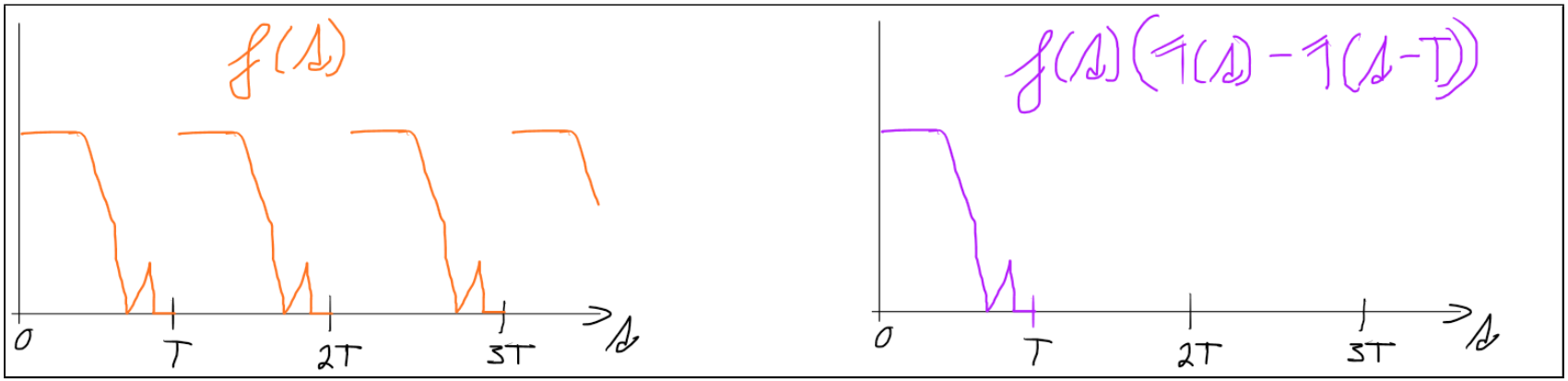
1. $$\mathscr{L}\left[\sin^2(t)\right](s) = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$
2. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí
$$\mathscr{L}\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Laplaceův obraz periodické funkce

Věta (O obrazu periodické funkce)

Nechť $f \in L_0$ je periodická na intervalu $[0, \infty)$ s periodou $T > 0$. Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1 - e^{-sT}}$$
$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \mathscr{L}\left[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t - T))\right](s)\,.$$



Příklad

Uvažme funkci

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[2k-2, 2k-1), \\ 0, & t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[2k-1, 2k). \end{cases}$$

Potom

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}.$$

Konvoluce

Definice

Nechť $f, g \in L_0$. **Konvoluce** funkcí f a g je funkce $(f * g)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

- Jsou-li $f, g \in L_0$, pak také $(f * g) \in L_0$ a $\max\{\alpha, \beta\}$, kde α je index růstu f a β je index růstu g, je index růstu $f * g$.
- Konvoluce je komutativní, tj. $f * g = g * f$.
- Při ztotožnění f a g s $f \cdot \mathbb{1}$, respektive $g \cdot \mathbb{1}$, se jedná konvoluci tak, jak jsme ji viděli u Fourierovy transformace.

Věta (O obrazu konvoluce)

Nechť $f, g \in L_0$. Platí

$$\mathscr{L}\left[(f * g)(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) \, \mathscr{L}\left[g(t)\right](s).$$

Příklad

Nechť $f(t) = t^n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Platí

$$(f * \mathbb{1})(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

- Předchozí příklad ukazuje, že $\mathbb{1}$ není jednotkový prvek operátoru konvoluce (žádná taková funkce ani neexistuje).

Příklad

- $\mathscr{L}\left[t * e^t\right](s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$.

Příklad

Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Uvažme integrodiferenciální rovnici

$$y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$. Tato úloha má pro $t \geq 0$ řešení

$$y(t) = y_0 + \frac{y_0}{2}t^2.$$

Inverzní Laplaceova transformace

- Mějme $\mathscr{L}[f(t)](s) = F(s)$, kde $f \in L_0$ s indexem růstu α.

Otázka

Jak ze znalosti obrazu zjistíme vzor?

- Dá se ukázat, že pokud je navíc f' po částech spojitá, pak

$$\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \to +\infty} \int_{L_y} F(s) e^{st} \, \mathrm{d}s,$$

  kde L_y je vertikální úsečka s parametrizací $\varphi(t) = x + it$, $t \in [-y, y]$, $x > \alpha$ libovolné.
- Tento vztah se nazývá Mellinův inverzní vzorec. Integrál na pravé straně můžeme často spočítat za pomoci reziduové věty.
- Důležité bylo, že jsme a priori věděli, že $F(s)$ je Laplaceovým obrazem nějaké funkce z L_0.
- Předefinujeme-li $f(t)$ v konečně mnoha bodech, její Laplaceův obraz se nezmění. Vzor tedy není jednoznačný.

Věta (Lerchova věta)

Nechť $f, g \in L_0$ jsou spojité zprava na $[0, \infty)$ a mají stejný Laplaceův obraz. Potom $f = g$.

- Laplaceova transformace je pro zprava spojité funkce z L_0 „bezeztrátová“.

Definice

Nechť $F(s)$ je holomorfní funkce v pravé polorovině $\operatorname{Re} s > \alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f \in L_0$ je **Laplaceův vzor** funkce F, jestliže $\mathscr{L}[f(t)](s) = F(s)$. Pokud je navíc f zprava spojitá na $[0, \infty)$, budeme značit $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)$.

Příklad

1. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}](t) = e^{at}$, pro každé $a \in \mathbb{C}$.
2. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^n}](t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathscr{L}^{-1}[\frac{2s+3}{s^2+1}](t) = 2\cos t + 3\sin t$.

Viz příklady na 3., 8. a 7. slajdu.

Tvrzení (Laplaceův vzor racionální funkce)

Nechť $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ je racionální funkce taková, že $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$. Nechť $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ jsou všechny kořeny polynomu Q. Potom

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st}$$

pro každé $t \in [0, \infty)$.

Příklad

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\right](t) = e^{2t} - (t+1)e^{t}$$

Tvrzení (Laplaceův vzor funkce $\frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}$)

Nechť $T > 0$ a $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}$, kde P, Q jsou polynomy splňující $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$. Označme $z_k = \frac{2k\pi i}{T}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ (tj. z_k jsou všechna řešení rovnice $1 - e^{-zT} = 0$), a nechť $w_1, \ldots, w_n$ jsou všechny kořeny polynomu Q, které nejsou mezi z_k. Potom funkce

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{s=w_j} F(s)e^{st} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st}$$

je Laplaceovým vzorem funkce $F(s)$.

- Tento vzor nebývá zprava spojitý, proto nepíšeme $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1-e^{-sT}}\right](t)$.

Příklad

Ať $F(s) = \frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}$. Laplaceův vzor k této funkci je

$$f(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\pi it}}{2k\pi i + 1}.$$

- Hledejme Laplaceův vzor k funkci $F(s) = G(s)e^{-as}$, kde $a > 0$.
- Nejdříve nalezneme vzor $g(t)$ k funkci $G(s)$ a poté využijeme toho (viz 4. pravidlo z 6. slajdu.), že $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$.

Upozornění

Metodu sčítání reziduí nelze přímo uplatnit na funkci $F(s) = G(s)e^{-as}$. Nejprve je třeba najít Laplaceův vzor $g(t)$ k funkci $G(s)$. Laplaceův vzor funkce $F(s)$ je potom funkce

$$f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a).$$

- Metoda sčítání reziduí „nevidí“ posun vzoru způsobený násobením obrazu funkcí e^{-as}.

Příklad

1. Chybné použití metody sčítání reziduí na funkci $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ dává chybný vzor $f(t) = \mathbb{1}(t)$. Správně je $f(t) = \mathbb{1}(t-1)\ldots$
2. $F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s-1)^2(s-2)}$ má vzor $f(t) = (e^{2(t-3)} - (t-2)e^{t-3})\mathbb{1}(t-3)$.

Řešení diferenciálních rovnic

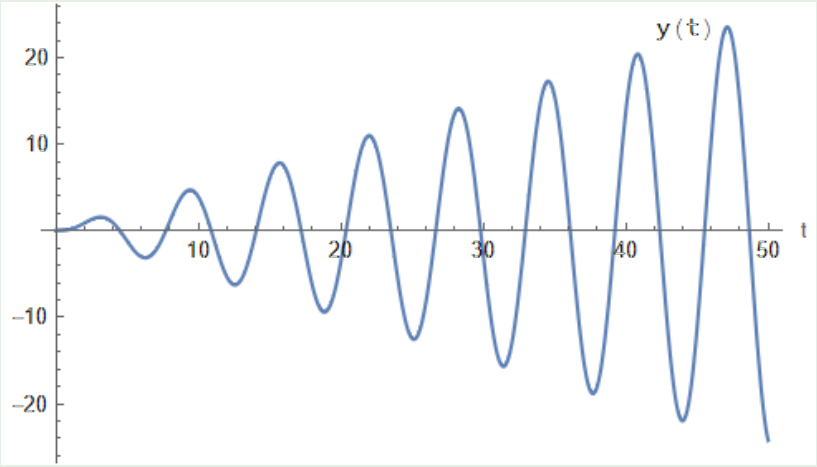
Příklad

Je dána úloha

$$y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Její řešení je

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t \quad \text{pro } t \geq 0.$$



- Řešení lze prodloužit na celé $\mathbb{R}$.