Komplexní analýza

Z-transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

- Diskrétní analogie Laplaceovy transformace umožňující využití metod komplexní analýzy pro řešení diskrétních problémů.
- Zpracování diskrétního signálu, řešení diferenčních rovnic metodami komplexní analýzy.
- Základní idea známá již Laplaceovi (1749–1827), znovu objevena W. Hurewiczem v roce 1947 v souvislosti s řídícím systémem radaru.

Definice Z-transformace

Definice

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je funkce $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$ definovaná jako

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ z \in U(\infty),$$

na největším okolí ∞, na kterém Laurentova řada konverguje, pokud řada konverguje na nějakém okolí ∞.

- Z-transformace posloupnosti je komplexní funkce komplexní proměnné definovaná pomocí Laurentovy řady na okolí ∞.
- Z linearity řad okamžitě plyne $\mathscr{Z}[\alpha a_n](z) = \alpha \mathscr{Z}[a_n](z)$ a $\mathscr{Z}[a_n + b_n](z) = \mathscr{Z}[a_n](z) + \mathscr{Z}[b_n](z)$, kdykoliv existuje pravá strana.

Příklad

1. Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n\right](z) = \frac{z}{z-\alpha}$$
pro $|z| > |\alpha|$. Speciálně:
$$\mathscr{Z}\left[1\right](z) = \frac{z}{z-1}$$
pro $|z| > 1$.
2. Pro $\omega \in \mathbb{C}$ platí
$$\mathscr{Z}\left[\sin(\omega n)\right](z) = \frac{z \sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
$$\mathscr{Z}\left[\cos(\omega n)\right](z) = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
pro $|z| > e^{|\operatorname{Im}\omega|}$.
3. Jest
$$\mathscr{Z}\left[\frac{1}{n!}\right](z) = e^{\frac{1}{z}}$$
pro $|z| > 0$.

Existence Z-transformace, prostor Z_0

Definice

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel je **nejvýše exponenciálního řádu**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M > 0$ takové, že $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
Množinu všech komplexních posloupností, které jsou nejvýše exponenciálního řádu, značíme symbolem Z_0.

- Jsou-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak také $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\alpha a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(a_n b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

Příklad

1. Každá omezená posloupnost je v Z_0.
2. Je-li $k \in \mathbb{N}_0$, pak $(n^k)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$. Tedy také $(P(n))_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ pro každý polynom P.
3. $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.

Věta (O existenci Z-transformace)

Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel existuje právě tehdy, když $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.
Existuje-li, je $\mathscr{Z}[a_n](z)$ holomorfní funkce na okolí ∞ s vlastní limitou v ∞.

- Jsou-li $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ různé posloupnosti, jsou jejich Z-transformace také různé.
- Množinu všech holomorfních funkcí na nějakém okolí ∞, které nelze holomorfně prodloužit na větší okolí ∞, s konečnou limitou v ∞ budeme značit H_∞.

Věta (O existenci vzoru)

Ke každé funkci $F \in H_\infty$ existuje posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ taková, že $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$.

- Důsledkem předchozího je, že Z-transformace je (lineární) bijekce mezi Z_0 a H_∞.

Vlastnosti Z-transformace

Tvrzení (O škálování vzoru)

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Jest

$$\mathscr{Z}\left[\alpha^n a_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $$\mathscr{Z}\left[\frac{2^n}{n!}\right](z) = e^{\frac{2}{z}}$$

2. $$\mathscr{Z}\left[2^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z) = \frac{2z}{z^2+4}$$

Viz 3. a 2. příklad na 4. slajdu.

Věta (O obrazu posunutí)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $k \in \mathbb{N}$, pak

$$\mathscr{Z}\left[a_{n+k}\right](z) = z^k \mathscr{Z}\left[a_n\right](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - \ldots - a_{k-1} z.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (O derivaci obrazu)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, pak

$$\mathscr{Z}\left[n a_n\right](z) = -z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathscr{Z}\left[a_n\right](z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $$\mathscr{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\right)\right](z) = -\frac{z}{z^2+1}.$$

2. $$\mathscr{Z}\left[n\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Konvoluce

Definice

Konvoluce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž prvky jsou definovány jako

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

- Občas budeme nepřesně psát $c_n = a_n * b_n$.
- Jedná se o diskrétní analogii konvoluce, kterou jsme viděli u Laplaceovy transformace. Stačí si místo $\sum_{k=0}^{n}$ představit $\int_0^n$ a místo $a_k b_{n-k}$ si představíme $a(k)b(n-k)$.

Příklad

$$(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$$

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, potom $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ a platí

$$\mathscr{Z}\left[a_n * b_n\right](z) = \mathscr{Z}\left[a_n\right](z)\, \mathscr{Z}\left[b_n\right](z)\,.$$

Příklad

1. $$\mathscr{Z}\left[1 * 1\right](z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

2. Z-transformace řešení $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ úlohy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 3^{n-k} = 4^n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0$$

je $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z) = \frac{z-3}{z-4}$.

---

2. příklad nás vede k přirozené otázce: Jak ze znalosti obrazu $\mathscr{Z}\left[a_n\right](z)$ určíme vzor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, což je to, co nás opravdu zajímá. Hledaný vzor nalezneme na 13. slidu.

Inverzní Z-transformace

Otázka

Jak najít pro danou funkci $F \in H_\infty$ její vzor?

Definice

Inverzní Z-transformace funkce $F \in H_\infty$ je posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ taková, že $\mathscr{Z}[a_n](z) = F(z)$.
Symbolem $\mathscr{Z}^{-1}[F(z)](n)$ budeme značit n-tý prvek inverzní Z-transformace funkce F, tj. $a_n = \mathscr{Z}^{-1}[F(z)](n)$.

- Inverzní Z-transformace je jednoznačná.
- <u>Jedna možnost</u>, jak nalézt inverzní Z-transformaci, je rozvinout funkci F do Laurentovy řady na okolí ∞.

Příklad

$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right](n) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{pokud } n = 2k \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Druhá možnost je využít integrálního vzorečku

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $U(\infty)$, na kterém odpovídající Laurentova řada konverguje.

Tvrzení (Inverzní Z-transformace metodou reziduí)

Nechť $F \in H_\infty$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit. Potom pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$a_n = \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} F(z) z^{n-1},$$

kde z_j jsou všechny izolované singularity funkce $F(z)z^{n-1}$.

- Další metoda je jistý limitní vzorec (viz skripta). Prakticky se hodí zejména jeho speciální případ pro nultý člen, a to:

$$a_0 = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

Příklad

Nechť

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Potom

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 0, \\ a_n &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = -1 + 2^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že formálním dosazením $n = 0$ do vzorce pro a_n, $n \in \mathbb{N}$, nedostáváme správnou hodnotu.

Příklad

Nechť

$$F(z) = \frac{z-3}{z-4}.$$

Potom

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](0) = 1, \\ a_n &= \mathscr{Z}^{-1}\left[F(z)\right](n) = 4^{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aplikace na řešení diferenčních rovnic

Příklad

Řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

splňující počáteční podmínky $y_0 = 1$ a $y_1 = 2$ je $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$y_n = 2^n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}_0.$$

Občas lze vzor „uhodnout“. Např. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\alpha}\right](n) = \alpha^n$, viz 1. příklad na 4. slidu.