Komplexní analýza

Křivkový integrál

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Křivky

Definice

Množina $C \subseteq \mathbb{C}$ se nazývá **křivka s parametrizací** $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $a < b$, jestliže

1. $C = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\}$;
2. φ je spojité a $[a,b]$ lze rozdělit na konečně mnoho uzavřených podintervalů, na kterých je φ' spojitá.

Úmluva

Často budeme říkat pouze křivka, nebudeme-li potřebovat parametrizaci φ zdůraznit.

Terminologie:

- $\varphi(t)$ ... **parametrizace** křivky C (určuje také **orientaci** křivky C, tj. způsob procházení křivky C)
- $\varphi(a)$ ... **počáteční bod** křivky C
- $\varphi(b)$ ... **koncový bod** křivky C
- $\varphi'(t)$ ... **tečný vektor** ke křivce C v bodě $\varphi(t)$, je-li $\varphi'(t) \neq 0$.

Pokračování terminologie:

- $-C$ ... **opačně orientovaná** křivka ke křivce C.
  - Je-li $\varphi(t)$, $t \in [a,b]$, parametrizace křivky C, pak $\psi(t) = \varphi(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, je parametrizace křivky $-C$.
- $C_1 + C_2$ ... křivka, která vznikne **spojením křivek** C_1 a C_2 takových, že koncový bod C_1 splývá s počátečním bodem C_2
- $C_1 - C_2$ ... spojení křivek C_1 a $-C_2$, tj. $C_1 + (-C_2)$

Délka křivky:

- **Délka křivky** C s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ je

$$L(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Příklad

Úsečka $[z_1, z_2]$ s počátečním bodem $z_1 \in \mathbb{C}$ a koncovým bodem $z_2 \in \mathbb{C}$.

- Parametrizace: $\varphi(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$.
- Délka úsečky: $\int_0^1 |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$.

- Symbol $[z_1, z_2]$ neoznačuje interval. Jen si šetříme ruku.

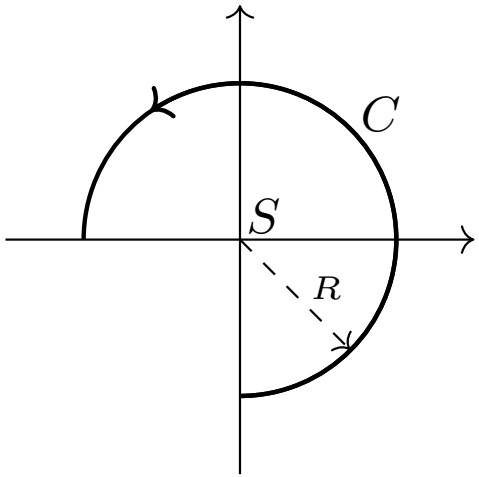
Příklad

Kružnice se středem $S \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$.

- Parametrizace:
  - Kladně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
  - Záporně orientovaná: $\varphi(t) = S + Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
- Délka kružnice: $\int_0^{2\pi} |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t = 2\pi R$.

Počáteční a koncový bod této parametrizace je $S + R$.

- Vhodnou volbou počátečního úhlu ψ_0 a koncového úhlu ψ_1, $\psi_0 < \psi_1$, místo 0 a 2π dostaneme parametrizaci části kružnice.



Např. $\varphi(t) = S + Re^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$, nebo $t \in [\frac{3\pi}{2}, 3\pi]$ atd.
Počáteční bod $S - Ri$ a koncový $S - R$.

Křivkový integrál v komplexní rovině

Definice

Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ a nechť f je spojitá komplexní funkce na C. Pak **křivkový integrál** funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci. Souhlasné parametrizace křivky dávají stejnou hodnotu integrálu. Neformálně, „souhlasné = stejný směr a stejný počet oběhů“.

Příklad

Nechť $n \in \mathbb{Z}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměrem $R > 0$. Potom

$$\int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Křivkový integrál v komplexní rovině

Tvrzení (Základní vlastnosti křivkového integrálu)

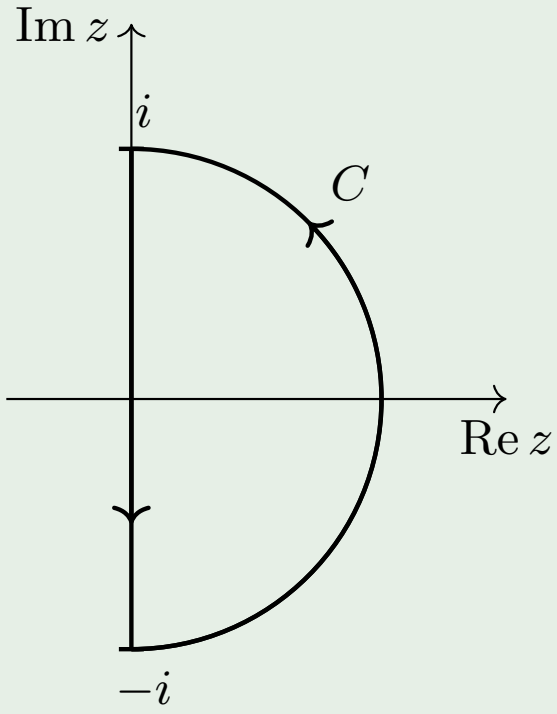
Nechť C je křivka. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ a f, g jsou spojité komplexní funkce na C. Potom:

1. $\int_C \alpha f(z) + g(z)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_C g(z)\,\mathrm{d}z$;
2. $\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$;
3. $\int_{C+K} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_K f(z)\,\mathrm{d}z$, kdykoli K je křivka, jejíž počáteční bod je koncovým bodem křivky C, a f je navíc spojitá na $C + K$;
4. $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(C) \max_{z \in C} |f(z)|$.

Důkaz: Viz přednáška (pouze 4. bod, zbytek domácí cvičení) ■

Příklad

Nechť C je křivka zadaná následujícím obrázkem:



Pak $\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = i\pi$.

Jordanovy křivky

Mějme křivku C s parametrizací $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.
Ještě trocha terminologie:

- C je **uzavřená**, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- C je **jednoduchá**, jestliže $\varphi(s) \neq \varphi(t)$ kdykoliv $a < s < t < b$.
- C je **Jordanova** křivka, pokud je uzavřená a jednoduchá.
- Jordanova křivka je (**kladně orientovaná**)/(**záporně orientovaná**), jestliže ji procházíme (proti směru)/(po směru) hodinových ručiček.

Věta (Jordanova věta)

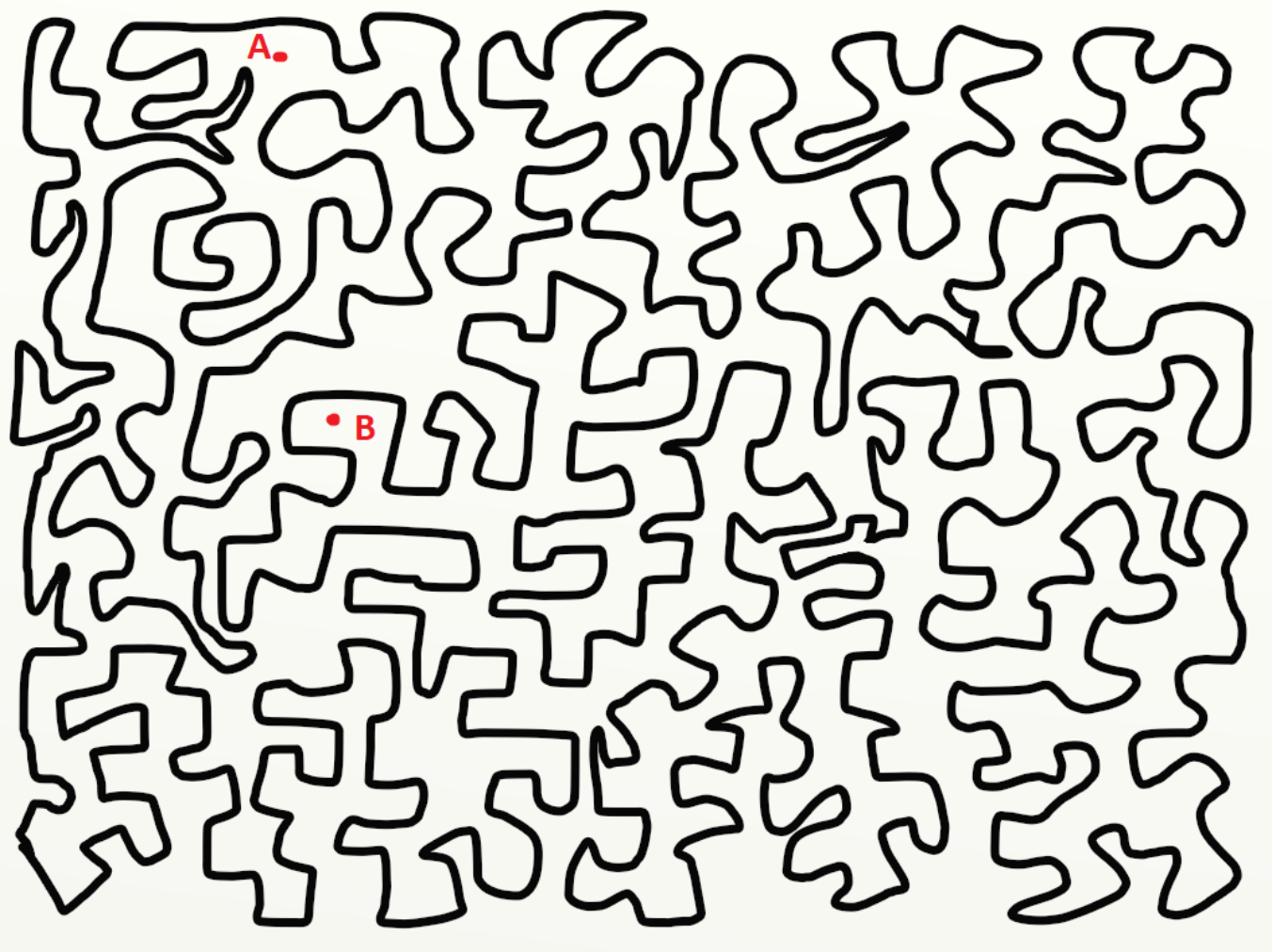
Je-li C Jordanova křivka, pak $\mathbb{C} \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\operatorname{Int} C$ a neomezené oblasti $\operatorname{Ext} C$, které jsou disjuktní.

Důkaz: ~~Zřejmé, triviální.~~ Důkaz velmi netriviální (vynecháme). ■

- $\operatorname{Int} C$ ... **vnitřek Jordanovy křivky** C.
- $\operatorname{Ext} C$ ... **vnějšek Jordanovy křivky** C.

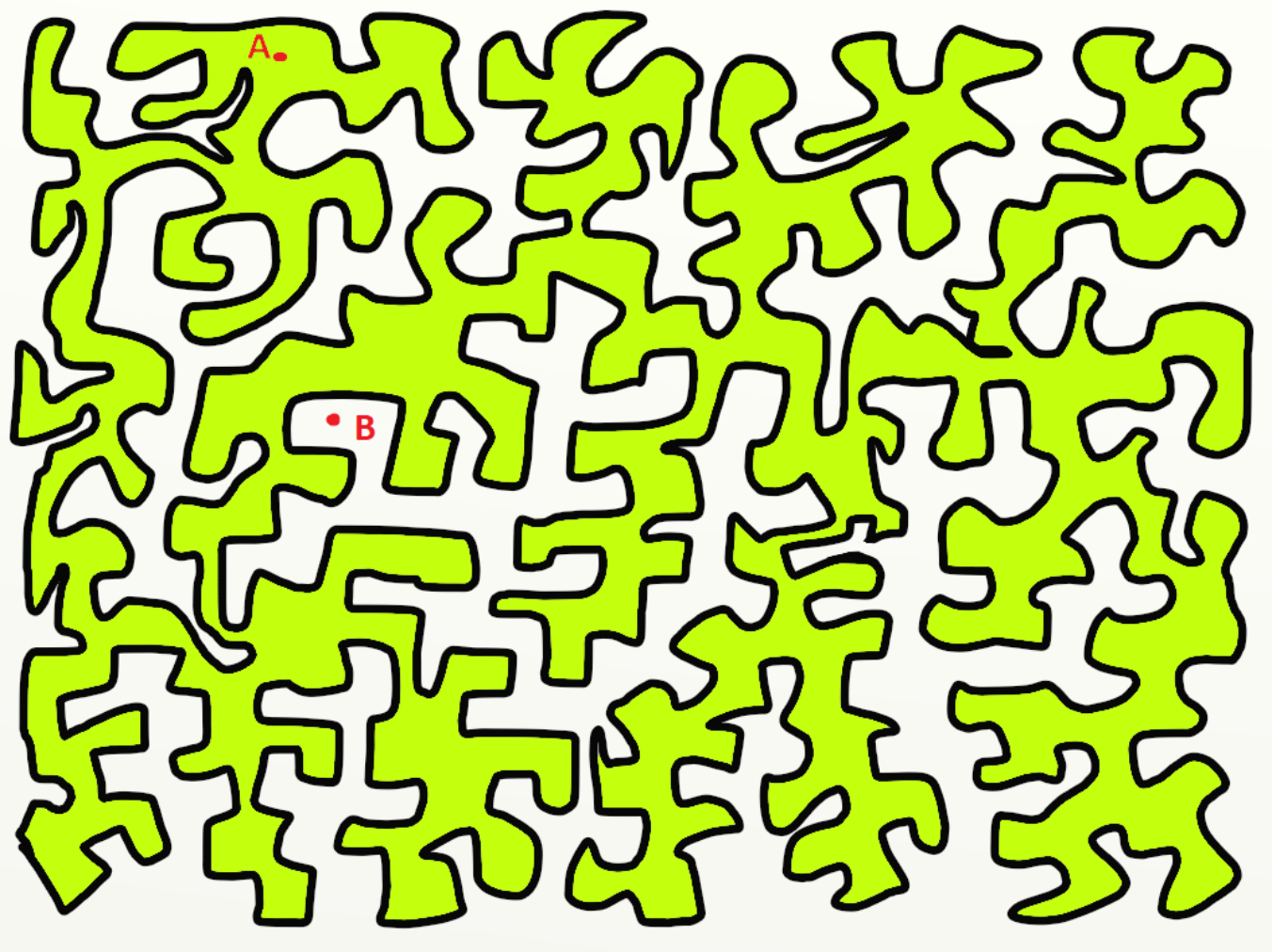
Otázka

Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



Otázka

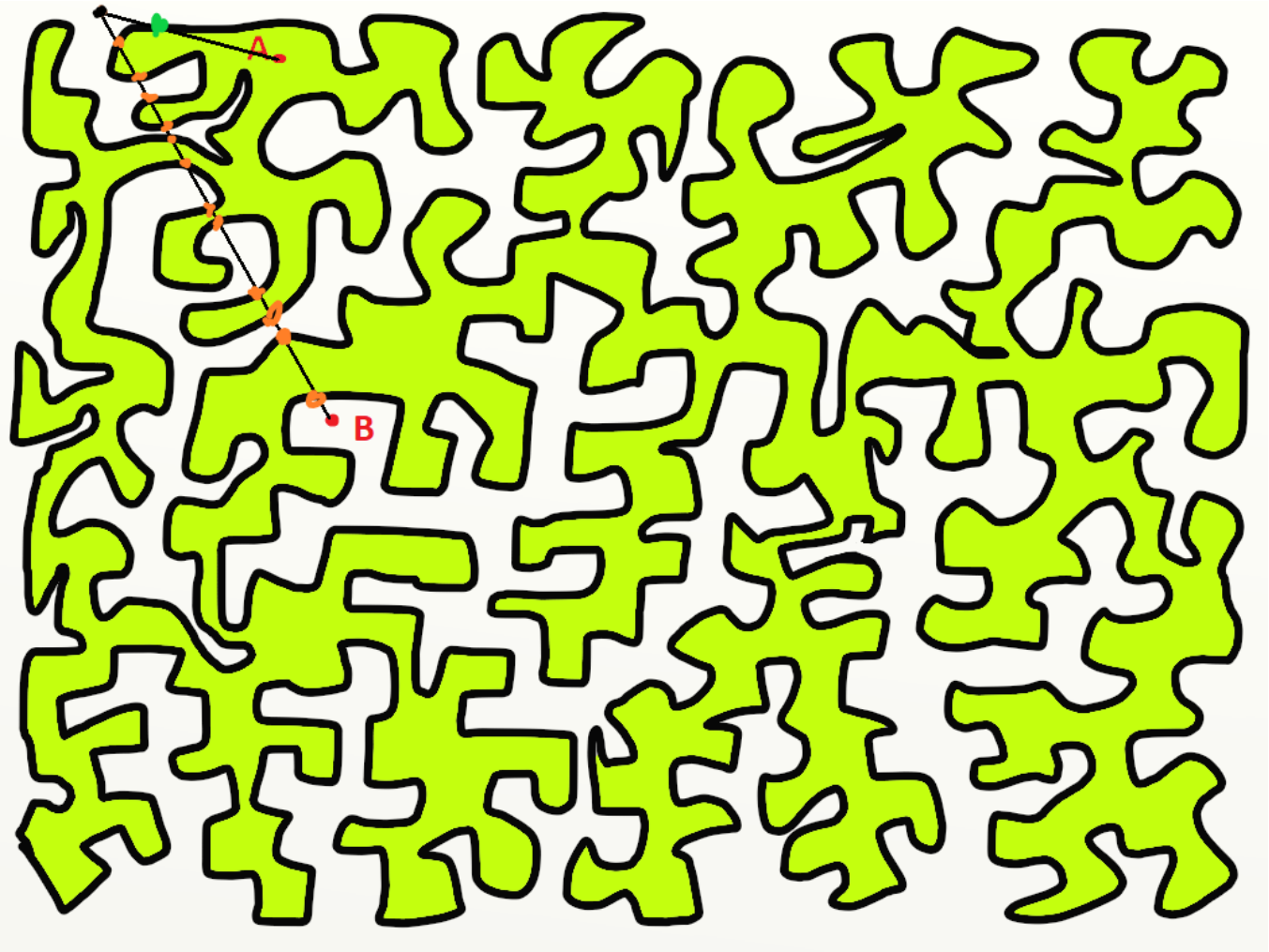
Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



- A leží uvnitř, B vně.

Otázka

Leží body A a B uvnitř, nebo vně?



- A leží uvnitř, B vně.

Jednoduše souvislé oblasti

Definice

Řekneme, že oblast $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **jednoduše souvislá**, jestliže pro každou Jordanovu křivku $C \subseteq \Omega$ je $\operatorname{Int} C \subseteq \Omega$.

- Neformálně, jednoduše souvislá oblast je „oblast bez děr“.
  I jeden odebraný bod je díra!

Příklad

- $\mathbb{C}$ a okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ (tedy otevřené kruhy) jsou jednoduše souvislé oblasti.
- Okolí nekonečna $U(\infty)$, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a prstencové okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ (tedy otevřené kruhy bez svých středů) jsou oblasti, které nejsou jednoduše souvislé.

Cauchyova věta a Cauchyho vzorec

Věta (Cauchyova věta)

Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a f je holomorfní na Ω, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pro každou uzavřenou křivku ležící v Ω.

- Předpoklad jednoduše souvislé oblasti a holomorfnosti funkce na ní je podstatný (viz příklady na 5. a 7. slidu)!

Příklad

1. $\int_C z^4\,\mathrm{d}z = 0$ pro každou uzavřenou křivku C.
2. $\int_C \sin(z^{49}) + e^{\cos z}\,\mathrm{d}z = 0$ pro každou uzavřenou křivku C.
3. Nechť C je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1. Pak $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = 0$.

Tvrzení (Princip deformace)

Nechť C je kladně orientovaná Jordanova křivka v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a K je kladně orientovaná kružnice se středem $z_0 \in \operatorname{Int} C$ taková, že $K \subseteq \operatorname{Int} C$. Nechť f je holomorfní v $\Omega \setminus \{z_0\}$, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_K f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a každou kladně orientovanou Jordanovu křivku C mající ve svém vnitřku bod z_0 platí

$$\int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{je-li } n = -1; \\ 0 & \text{je-li } n \neq -1. \end{cases}$$

Viz příklad na 5. slidu.

Věta (Cauchyho vzorec)

Nechť f je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω a $z_0 \in \Omega$. Potom f má v z_0 derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde $C \subseteq \Omega$ je libovolná kladně kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $z_0 \in \operatorname{Int} C$.

- Speciálně: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$

Příklad

Nechť C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$. Pak

1. $\int_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} \, \mathrm{d}z = \pi(-8 + 6i)$.
2. $\int_C \frac{z^2 - 4z + 4}{(z + i)^2} \, \mathrm{d}z = -\pi(-4 + 8i)$.

Nahradíme-li C libovolnou kladně orientovanou Jordanovou křivkou takovou, že $-i \in \operatorname{Int} C$, výsledek se nezmění.

Některé důsledky Cauchyho vzorce

Věta (Existence všech derivací)

Jestliže f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, pak má f na Ω derivace všech řádů.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Liouvillova věta)

Nekonstantní celistvá funkce je neomezená.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Goniometrické funkce $\sin$ a $\cos$ jsou v $\mathbb{C}$ neomezené.

Věta (Základní věta algebry)

Každý nekonstantní polynom má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz: Viz přednáška. ■