Komplexní analýza

Mocninné řady

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Řady komplexních čísel, základní pojmy

Základní pojmy:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ... (nekonečná) **řada** (komplexních čísel).
- $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$... **n-tý částečný součet** řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- $(s_n)_{n=0}^{\infty}$... **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definice

Má-li posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konečnou limitu $s \in \mathbb{C}$, tak její hodnotu nazýváme **součet** řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Píšeme $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

- Definice limity posloupnosti komplexních čísel je stejná jako v reálném případě. Tj. posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexních čísel má limitu $L \in \mathbb{C}_\infty$, jestliže pro každé $U(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $b_n \in U(L)$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.
- Platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} b_n = \operatorname{Re} L \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} b_n = \operatorname{Im} L \in \mathbb{R}$.

Definice

Říkáme, že řada **konverguje**, jestliže existuje její součet. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje**.

Tvrzení (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Definice

Říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Tvrzení

Jestliže řada konverguje absolutně, potom konverguje.

Podílové a odmocninové kritérium

Tvrzení (Podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada nenulových komplexních čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \in [0, +\infty].$$

- Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.
- Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ konverguje absolutně.

- „Často dobrá volba, když se vyskytují faktoriály.“

Tvrzení (Odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada komplexních čísel a_n a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty].$$

- Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.
- Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad

$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n$ diverguje.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ (zde $c > 0$ je kladné reálné číslo).

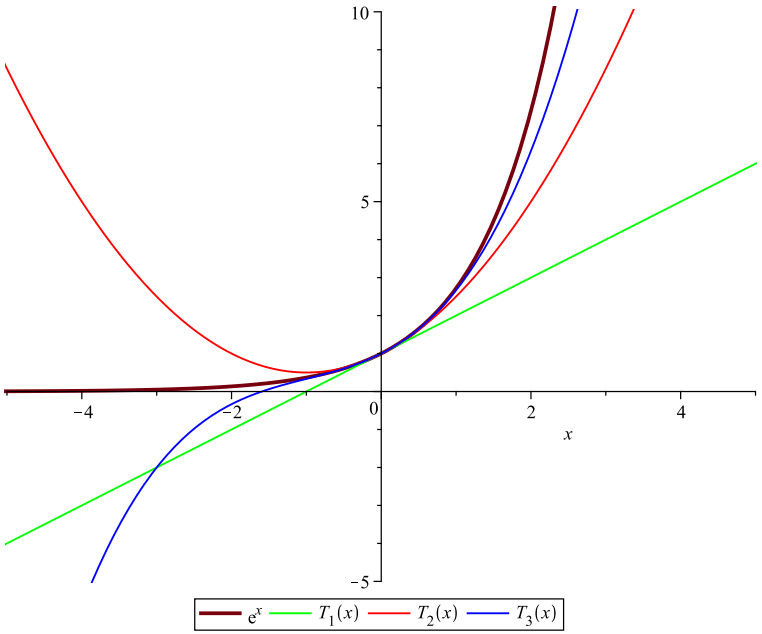
Mocninné řady – motivace

- Z reálné analýzy víme, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} T_n(x), \ x \in \mathbb{R},$$

kde $T_n(x)$ je polynom

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

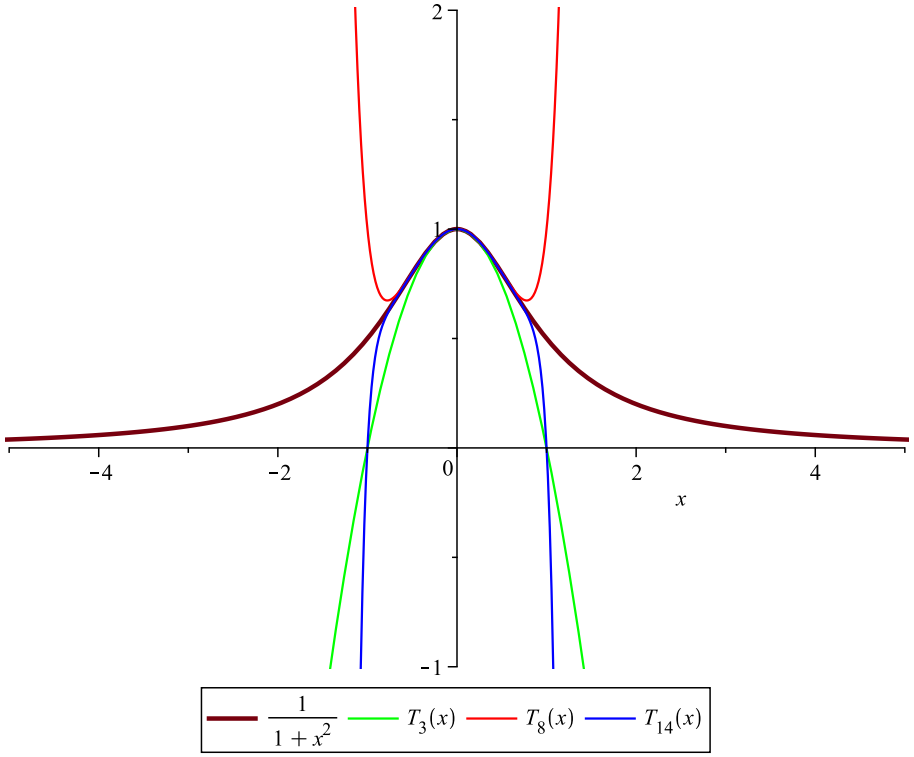


- Čím vyšší stupeň, tím lepší aproximace a na větším okolí 0.
- Ne vždy je to ale takto pěkné...

- Zkusme nahradit funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, jejím Taylorovo polynomem $T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
- Pro jaké hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n(x)?$$

- Z obrázku vidíme, že na celém $\mathbb{R}$ asi ne. Dá se ukázat, že to platí jen pro $x \in (-1, 1)$.



- Kde je problém? Čím se liší e^x a $\frac{1}{1+x^2}$?
- Obě funkce jsou nekonečně diferencovatelné na $\mathbb{R}$...

Mocninné řady – základní definice

Definice

Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde z je komplexní proměnná, se nazývá **mocninná řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

- z_0 ... **střed mocninné řady**
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ řada komplexních čísel.
- Formálně se jedná o nekonečný polynom $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$
- Čísla a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty mocninné řady**.

Otázka

Pro jaké $z \in \mathbb{C}$ mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje (absolutně) či diverguje?

Definice

- Říkáme, že mocninná řada **(absolutně) konverguje na** množině $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže (absolutně) konverguje v každém bodě množiny M.
- Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje na množině $M \subseteq \mathbb{C}$, pak jejím **součtem na** M rozumíme funkci $f(z)$ definovanou předpisem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z \in M.$$

- Připomeňme, že $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Speciálně $0^0 = 1$.
- Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ vždy absolutně konverguje ve svém středu $z = z_0$.

Příklad (Geometrická řada)

Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

1. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| < 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konverguje absolutně a platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
2. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverguje.

- Geometrická řada, což je mocninná řada se středem $z_0 = 0$, konverguje absolutně na kruhu. To není náhoda...

Poloměr konvergence a kruh konvergence

Věta (O poloměru konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada. Existuje právě jedno $R \in [0, +\infty]$ takové, že současně platí:

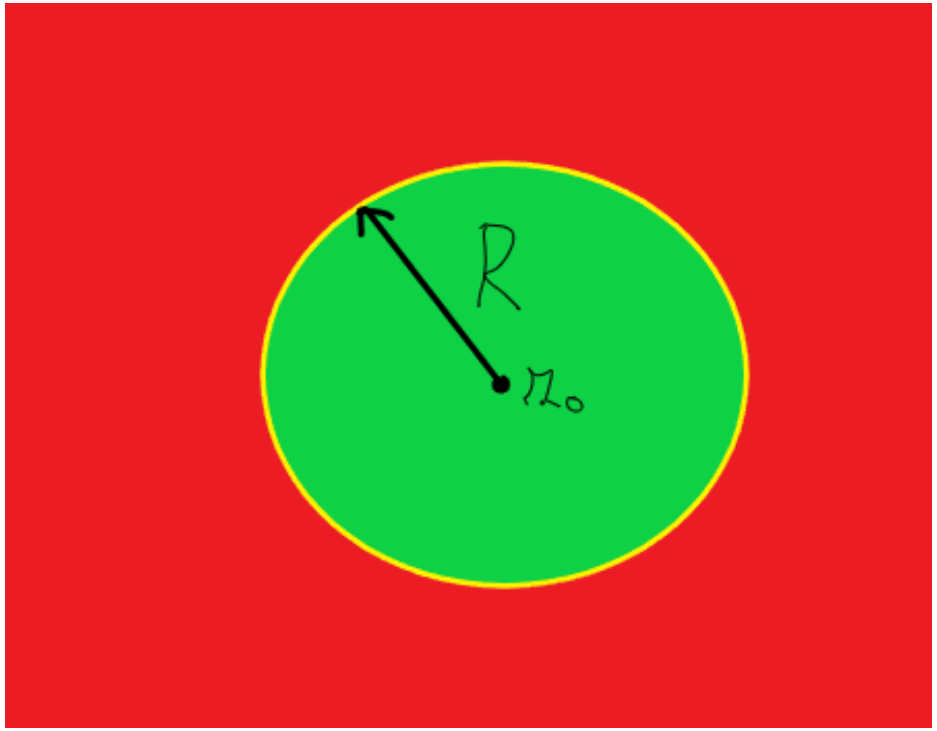
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje absolutně na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$;
- řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > R\}$.

- Je-li $R \in (0, \infty)$, mocninná řada konverguje absolutně na kruhu $U(z_0, R)$.
- Je-li $R = +\infty$, mocninná řada konverguje absolutně na $\mathbb{C}$.
- Je-li $R = 0$, mocninná řada diverguje všude na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Definice

Číslo R nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Množinu $U(z_0, R)$ nazýváme **kruh konvergence** mocninné řady.

- Situace, když $R \in (0, \infty)$:



- absolutně konverguje, diverguje, obecně nelze rozhodnout (nebudeme vyšetřovat).
- $R = \infty$... zelená je celá komplexní rovina
- $R = 0$... červené je vše kromě středu z_0

Příklad

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ldots R = 1,\ z_0 = 0.$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-i)^n \ldots R = 2,\ z_0 = i.$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ldots R = \infty,\ z_0 = 0.$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(z+2-i)^n \ldots R = 0,\ z_0 = -2+i.$

- Často potkáváme i mocninné řady v „nekanonickém tvaru“. Např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z-5)^{2n} = (z-5)^2 + 4(z-5)^4 + 9(z-5)^6 + \cdots .$$

Tato řada má (rozepsáný) kanonický tvar

$$0+0(z-5)+(z-5)^2+0(z-5)^3+4(z-5)^4+0(z-5)^5+9(z-5)^6+\cdots$$

Otázka

Mocninné řady jsou na svém kruhu konvergence „nekonečné polynomy“. Co vše s nimi můžeme dělat jako s polynomy?

Operace s mocninnými řadami

Tvrzení (mocninné řady sčítáme a násobíme jako polynomy)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence R_1 a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence R_2.

- Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence alespoň $R=\min\{R_1,R_2\}$ a platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n.$$
- Nechť $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ má poloměr konvergence alespoň $R=\min\{R_1,R_2\}$ a platí
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

- Pokud $R_1 \neq R_2$, pak mají mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ poloměr konvergence právě $R=\min\{R_1,R_2\}$.

Věta (Derivování člen po členu)

Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ poloměr konvergence $R>0$ a $f(z)$ je její součet na $U(z_0,R)$.

1. $f(z)$ je holomorfní na $U(z_0,R)$ a $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ na $U(z_0,R)$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ má poloměr konvergence R.
3. $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro každé $n\in\mathbb{N}_0$.

Věta (Integrování člen po členu)

Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ poloměr konvergence $R>0$ a $f(z)$ je její součet na $U(z_0,R)$.

1. Funkce $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, $z\in U(z_0,R)$, je primitivní funkce k funkci $f(z)$ na $U(z_0,R)$, tj. $F'(z)=f(z)$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ má poloměr konvergence R.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Rozvoj holomorfní funkce do mocninné řady

Příklad

1. Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ má součet $\frac{1}{(1-z)^2}$ pro $|z|<1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ má součet $-\ln(1-z)$ pro $|z|<1$.

Věta (Existence rozvoje do mocninné řady)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f(z)$ je holomorfní funkce na Ω. Nechť $z_0 \in \Omega$ a $R \in (0,+\infty]$ je takové, že $U(z_0,R) \subseteq \Omega$. Potom pro všechna $z \in U(z_0,R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Příklad

- $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ pro $|z|<1$.

Vzpomeňte si na otázku z 6. slidu.

Definice

Nechť funkce f má derivace všech řádů v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ se nazývá **Taylorova řada** funkce f o středu z_0.

- Je-li funkce $f(z)$ holomorfní na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, potom $f(z)$ se rovná své Taylorově řadě o středu z_0 na tomto okolí.

Tvrzení (Jednoznačnost rozvoje do mocninných řad)

Jestliže platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ na nějakém okolí $U(z_0)$, pak $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů)

Je dána rovnice $f'(z) = 2zf(z)$ a počáteční podmínka $f(0) = 1$. Její řešení ve tvaru mocninné řady je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$.

Vybrané důležité rozvoje do mocninných řad

Příklad

1. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pro $|z| < 1$.
2. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
3. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
5. $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.