Komplexní analýza

Laurentovy řady a izolované singularity

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

Uvažme funkci $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$, která je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$.

- Funkci $f(z)$ můžeme rozvinout do mocninné řady se středem v libovolném bodě $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$. Se středem $z_0 \in \{0, 2\}$ to ale nelze, byť okolo bodů 0 a 2 je její chování nejzajímavější.
- Funkci $f(z)$ půjde rozvinout do řad mocnin z či $(z-2)$, pokud si umožníme záporné exponenty a jiné obory konvergence než kruhy.
- Např.

$$\frac{1}{z(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16} + \cdots \quad \text{pro } 0 < |z| < 2$$

nebo

$$\frac{1}{z(2-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \frac{4}{z^4} - \cdots \quad \text{pro } |z| > 2.$$

- Později uvidíme, že takové rozvoje mají podstatné aplikace (reziduová věta, inverzní $\mathscr{Z}$-transformace, ...)

Laurentovy řady

Definice

- Řada tvaru
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
kde z je komplexní proměnná, se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.
- Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
- Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

- z_0 ... **střed Laurentovy řady**
- a_n ... **koeficienty Laurentovy řady**
- Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada. Speciálně, obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z - z_0)$.
- Hlavní část Laurentovy řady obsahuje záporné mocniny $(z - z_0)$. Speciálně, není to mocninná řada v proměnné z.

Konvergence Laurentovy řady

Definice

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Řekneme, že Laurentova řada:

- **konverguje** (resp. **konverguje absolutně**) v bodě z, jestliže v bodě z konverguje (resp. konverguje absolutně) současně její hlavní a regulární část;
- **diverguje** v bodě z, jestliže v bodě z nekonverguje.

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$.

- Řekneme, že Laurentova řada **konverguje na** M (resp. **konverguje absolutně na** M), jestliže konverguje (resp. konverguje absolutně) v každém bodě množiny M.
- Konverguje-li Laurentova řada na M, potom funkci
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z \in M,$$
nazýváme **součtem** Laurentovy řady na M a píšeme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Definice

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0; r; R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

se nazývá **mezikruží** o středu z_0, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R.

Tvrzení

Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$ takové, že

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$;
2. $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| > r$ a diverguje pro $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně na $P(z_0; r; R)$ a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- $P(z_0; r; R)$ z tvrzení ... **mezikruží konvergence** Laur. řady

Rozvoj do Laurentovy řady

Příklad

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}}(z-i)^n$ má mezikruží konvergence $P(i;\frac{1}{2};2)$. Její součet na $P(i;\frac{1}{2};2)$ je $f(z) = \frac{1}{2(z-i)-1} + \frac{2}{2-(z-i)}$.
2. $\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ diverguje v každém bodě $z \in \mathbb{C}$.

Věta (Rozvoj do Laurentovy řady)

Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží $P(z_0;r;R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se součtem $f(z)$ na $P(z_0;r;R)$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka, která leží v $P(z_0;r;R)$ a má ve svém vnitřku bod z_0.

- Laurentova řada z předchozí věty se nazývá **Laurentův rozvoj** funkce f na $P(z_0;r;R)$.

- Je-li $R > 0$, pak $P(z_0; 0; R)$ je prstencové okolí bodu z_0, tj. $P(z_0; 0; R) = P(z_0, R)$.

Příklad

1. $\frac{e^z}{z} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ na $P(0; 0; \infty)$.
2. $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ na $P(0; 0; 1)$.
3. $\frac{1}{z(1-z)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$ na $P(0; 1; \infty)$.
4. $\frac{3}{z(3-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$ na $P(1; 1; 2)$.

Izolované singularity

Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f, jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má izolovanou singularitu v 2.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v 0.
5. Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v 0.

Otázka

Lze nějak klasifikovat „jak špatná“ je izolovaná singularita? Je izolovaná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$ v 0 „horší“ než ta funkce $\frac{1}{z}$?

Klasifikace izolovaných singularit

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ na $P(z_0)$. Řekneme, že z_0 je:

1. **odstranitelná singularita**, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
2. **pól**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu;
3. **podstatná singularita**, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n.

- Pól řádu k se také nazývá k-**násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.
- Neformálně:
  - odstranitelná singularity. . . singularita je jen zdánlivá, lze ji odstranit;
  - pól řádu k. . . funkce se blízko z_0 chová jako $\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$;
  - podstatná singularita . . . funkce se blízko z_0 chová velmi divoce, vážné problémy

Příklad

1. Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má odstranitelnou singularitu v 0.
2. Funkce $\frac{1}{z}$ má jednoduchý pól v 0.
3. Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má pól řádu 5 v 2.
4. Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má podstatnou singularitu v 0.

- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj funkce na prstencovém okolí izolované singularity, snadno ji můžeme klasifikovat.
- V případě odstranitelných singularit a pólů si ukážeme, jak je klasifikovat i bez znalosti rozvoje.
- Funkce $\frac{z^8(z-1)}{z^7(z-1)^3}$ má v bodě:
  - 0 odstranitelnou singularitu. Všimněme si, že 0 je 8 násobný kořen čitatele, 7 násobný kořen jmenovatele a $8 \geq 7$;
  - 1 pól řádu 2. Všimněme si, že 1 je jednoduchý kořen čitatele, 3 násobný kořen jmenovatele, $1 < 3$ a $3 - 1 = 2$.

Póly a odstranitelné singularity

- Uvažme polynom $P(z) = (z - z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 je kořen násobnosti k a platí $P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$. Řekneme, že f má v z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, jestliže $f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Také říkáme, že z_0 je k-**násobný kořen**.

- z_0 je k-násobný kořen polynomu $P(z)$ právě tehdy, když $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, kde $Q(z)$ je polynom takový, že $Q(z_0) \neq 0$.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní na okolí $U(z_0)$. Pak z_0 je k-násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce g na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Tvrzení (odstranitelné singularity a póly pomocí násobností kořenů)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže f má v z_0 kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a g má v z_0 kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě z_0

- odstranitelnou singularitu, jestliže $m \geq n$;
- pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

1. $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
2. $\frac{1-\cos z}{z^8+z^5}$ má v 0 trojnásobný pól.
3. $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$ má jednoduché póly v bodech $\frac{1}{2n\pi i}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bod 0 není izolovanou singularitou funkce $\frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$.

Izolované singularity a limita

Věta (Charakterizace typů izolovaných singularit)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f.

1. Funkce f má v z_0 odstranitelnou singularitu právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ je konečná.
2. Funkce f má v z_0 pól právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

   Funkce f má v z_0 k-násobný pól právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná a nenulová.
3. Funkce f má v z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.

Tvrzení (O odstranění odstranitelné singularity)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je odstranitelná singularita funkce f.
(Do)/(Pře)definujeme-li funkci f v bodě z_0 hodnotou $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, pak vzniklá funkce je holomorfní na $U(z_0)$.