Komplexní analýza

Reziduová věta a její aplikace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Motivace

Mějme holomorfní funkci $f(z)$ na $P(z_0; 0; R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Chceme spočítat $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v $P(z_0; 0; R)$ taková, že $z_0 \in \operatorname{Int} C$.

- Počítat $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ z definice je často velmi pracné či nemožné.
- Na $P(z_0; 0; R)$ můžeme funkci $f(z)$ rozvinout do Laurentovy řady. Víme, že pro její koeficienty a_n platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

- Volbou $n = -1$ tedy dostaneme

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}.$$

- Hodnota $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ je tedy zakódována v jednom jediném čísle, a to v koeficientu u $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ na $P(z_0; 0; R)$.

Reziduum

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f(z)$ a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

na $P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá **reziduum** funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f$.

- Budeme-li chtít zdůraznit proměnnou, napíšeme $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

Příklad

1. $\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z-1)^3} = 0$.
2. $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{2}$.

- Pokud je $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelná singularita funkce f, potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$. Opačná implikace ale neplatí. Viz 1. příklad výše.

Výpočet rezidua v pólech

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu k funkce f. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně:
  - je-li z_0 jednoduchý pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$;
  - je-li z_0 dvojnásobný pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'$.

Příklad

Nechť $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)^2}$.

1. $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{4}$.
2. $\operatorname{res}_{-1} f(z) = -\frac{1}{4}$.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$. Jestliže g má v z_0 jednonásobný kořen, potom $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos(z-\pi)}{1+e^{iz}} = i.$$

Upozornění

Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definováno a je to konečné číslo. Nemůže se stát, že „neexistuje“ nebo že vyjde ∞.

Tvrzení (l'Hospitalovo pravidlo, „$\frac{0}{0}$“)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$, splňují $f(z_0) = g(z_0) = 0$ a g není identicky 0 na $U(z_0)$. Potom

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Reziduová věta

Věta (Reziduová věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v Ω. Nechť f je holomorfní funkce na $\Omega \setminus S$, kde $S = \{z \in \operatorname{Int} C : z \text{ je izolovaná singularita funkce } f\}$, a S je konečná množina. Potom platí

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w \in S} \operatorname{res}_w f(z).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Ať C je kladně orientovaná hranice obdélníku o vrcholech $-i$, $4-i$, $4+i$, i. Pak

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{3\pi i}{16}.$$

Aplikace Reziduové věty, integrály přes reálnou osu

- V dalším budeme chápat integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  tj. ve smyslu tzv. Cauchyovy hlavní hodnoty.
- V tomto smyslu je $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pokud bychom definovali (tzv. nevlastní Riemannův integrál)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  pak by integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ neexistoval.
- Pokud ale integrál ve smyslu nevlastního Riemannova integrálu existuje, pak existuje také ve smyslu hlavní hodnoty.
- Naše pojetí ve smyslu hlavní hodnoty je tedy obecnější.

Tvrzení (Integrály z racionálních funkcí přes reálnou osu)

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy, $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$, a Q nemá žádný reálný kořen, potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Upozornění

Rezidua počítáme pouze v kořenech polynomu Q s kladnou imaginární část.

Tvrzení (Integrály s oscilující exponenciálou přes reálnou osu)

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy, $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$, a Q nemá žádný reálný kořen. Nechť α je nenulové reálné číslo.

1. Jestliže $\alpha > 0$, pak
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$
kde
$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$
2. Jestliže $\alpha < 0$, pak
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$
kde
$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Upozornění

Pozor na rozdíly v závislosti na znaménku parametru α.

- Jsme-li v situaci jako na minulém slidu a polynomy P a Q mají reálné koeficienty, potom

$$\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

a

$$\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \pi e^{-1+2i} = \frac{\pi\cos 2}{e} + \frac{\pi \sin 2}{e} i,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \sin 2}{e},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \cos 2}{e}.$$