

Komplexní analýza

Komplexní tvar Fourierovy řady

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Fourierovy řady, reálný tvar, opakování

- Mějme funkci $f: [a, a+T] \rightarrow \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, která je absolutně integrovatelná na $[a, a+T]$, tj.

$$\int_a^{a+T} |f(t)| dt < \infty.$$

- Její Fourierova řada (v reálném tvaru) je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt.$$

- Toto je tzv. **reálný tvar Fourierovy řady** a čísla a_n , b_n jsou **reálné Fourierovy koeficienty**.

- Všimněme si, že

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{2\pi i n t}{T}} - e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}}{2i} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i b_n}{2} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \right).
 \end{aligned}$$

- Dále

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt$$

$$\frac{a_n + i b_n}{2} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{\frac{2\pi i n t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i (-n)t}{T}} dt.$$

- Nakonec

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot t}{T}} dt.$$

Komplexní tvar Fourierovy řady

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Nechť $f: [a, a+T] \rightarrow \mathbb{C}$ je absolutně integrovatelná. Její **komplexní Fourierova řada** (nebo také **komplexní tvar Fourierovy řady**) je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

Čísla c_n se nazývají **komplexní Fourierovy koeficienty** funkce f .

- Řadu chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj. jako limitu $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.

Vztahy mezi reálnými a komplexními koeficienty

- Jest

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

- Naopak

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- Pokud funkce f nabývá pouze reálných hodnot, potom

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

V takovém případě tedy

$$a_n = 2\operatorname{Re} c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = -2\operatorname{Im} c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$