

Komplexní analýza

Fourierova transformace

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

- Fourierova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$ nám umožňuje rozložit $T > 0$ periodickou funkci (signál) do harmonických kmitů s frekvencemi $\frac{n}{T}$.
- Čím větší je velikost $|c_n|$, tím větší je role frekvence $\frac{n}{T}$.
- Pro obecné (neperiodické) funkce (signály) bychom si pouze s kmity o frekvenci $\frac{n}{T}$ nevystačili, místo toho potřebujeme zkoumat všechny frekvence.
- Fourierova transformace nám (mj.) umožňuje analyzovat neperiodické funkce (signály), obsahuje informace o všech frekvencích.
- Metody Fourierovy transformace nám také umožňují efektivně řešit řadu diferenciálních rovnic.
- Jde o velmi důležitý nástroj s různorodým využitím.
 - kompresní algoritmy, analýza DNA sekvencí, aplikace Shazam (rozpoznávání hudby), snímky noční oblohy (radiová interferometrie), analýza zemětřesení (stavba odolných budov), zobrazovací metody v medicíně (MRI atp.), ...

Definice

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. **Fourierova transformace** funkce f je funkce $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.

Inverzní Fourierova transformace funkce f je funkce $\check{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

konverguje-li tento integrál pro každé $\omega \in \mathbb{R}$.

- Integrály chápeme ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(t) dt$.
- Různé zdroje, různé definice.

- Alternativně budeme také značit $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$
a $\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega)$.
- Z linearity integrálu plyne $\widehat{f+g}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
a $\widehat{\alpha f}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega)$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$, existuje-li pravá strana.

Věta (Existence a spojitost Fourierovy transformace)

Je-li funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolutně integrovatelná na \mathbb{R} , tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty,$$

potom $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ existuje a je to spojitá funkce na \mathbb{R} .

- Množinu všech absolutně integrovatelných funkcí na \mathbb{R} budeme značit $L^1(\mathbb{R})$.
- Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, potom platí $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$ (tzv. Riemannovo–Lebesgueovo lemma).

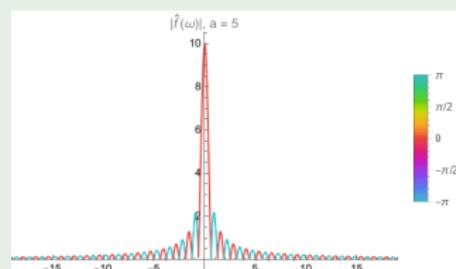
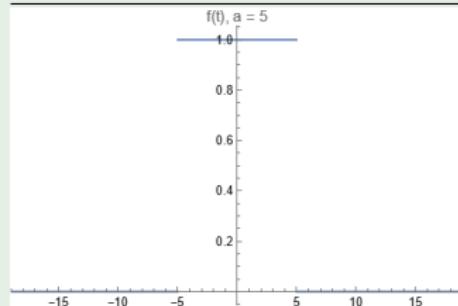
Příklad

Nechť

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-a, a], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \end{cases}$$

kde $a > 0$. Potom

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(a\omega)}{\omega}, & \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 2a, & \omega = 0. \end{cases}$$



Příklad

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Tvrzení

- ① $\mathcal{F}[f(t)](\omega) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[f(t)](-\omega).$
- ② Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f(t)](\omega).$
- ③ Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - a).$
- ④ Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right).$

Vše za předpokladu, že existuje Fourierova transformace na pravé straně.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\mathcal{F}\left[\frac{e^{it}}{1 + (2t - 3)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3i(\omega-1)}{2}} e^{-\frac{|\omega-1|}{2}}$$

Z příkladu na 5. slidi víme, že $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$

Fourierova transformace a derivace

Věta (Obraz derivace a derivace obrazu)

① Jestliže $n \in \mathbb{N}$ a $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ jsou spojité, pak

$$\mathcal{F} [f^{(n)}(t)] (\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$$

② Jestliže $f(t)$ a $tf(t)$ leží v $L^1(\mathbb{R})$, pak

$$\mathcal{F} [tf(t)] (\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F} [f(t)] (\omega).$$

Důkaz: Viz přednáška.



Příklad (Obraz Gaussovy funkce)

Pro $a > 0$ platí

$$\mathcal{F} [e^{-at^2}] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Věta o inverzi

Věta (Věta o inverzi)

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ a také $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Je-li f spojitá v $t \in \mathbb{R}$, potom

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(\omega)](t).$$

- Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ spojité funkce je Fourierova transformace „bezezrátová“, tj. platí pro ně: pokud $\hat{f} = \hat{g}$, potom $f = g$.

Příklad

1

$$\mathcal{F} [e^{-|t|}] (\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

2 Diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = 2e^{-|t|}$$

má řešení

$$y(t) = -(1 + |t|)e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definice

Konvoluce funkcí $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná pro $t \in \mathbb{R}$ předpisem

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau,$$

konverguje-li tento integrál pro každé $t \in \mathbb{R}$.

- Existuje-li konvoluce $f * g$, pak $f * g = g * f$.
- Jsou-li $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pak také $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

Věta (O obrazu konvoluce)

Jestliže $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potom

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

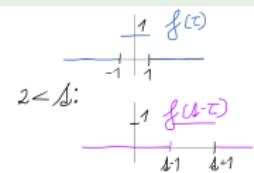
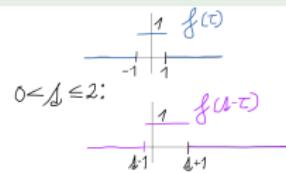
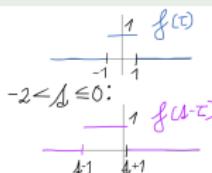
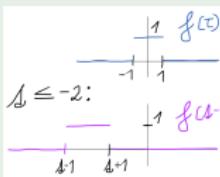
Příklad

At

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

1

$$(f * f)(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -2] \cup (2, \infty), \\ t + 2, & t \in (-2, 0], \\ 2 - t, & t \in (0, 2]. \end{cases}$$



2

$$\mathcal{F}[(f * f)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Tvrzení

Nechť $f: [a, a + T] \rightarrow \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, je absolutně integrovatelná. Nechť f_T značí její rozšíření nulou, tj.

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pokud } t \in [a, a + T], \\ 0, & \text{pokud } t \notin [a, a + T]. \end{cases}$$

Potom pro komplexní Fourierovy koeficienty funkce f platí

$$c_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}[f_T(t)] \left(\frac{2\pi n}{T} \right).$$

Připomeňme si, že $c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{T} t} dt$.

Příklad

Komplexní Fourierovy koeficienty funkce $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ definované jako

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \in [-2, 2] \setminus [-1, 1], \end{cases}$$

jsou

$$c_n = \begin{cases} 4 \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}, & \text{pro } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 2, & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

Její komplexní Fourierova řada tedy je

$$2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} 4 \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} e^{i \frac{\pi n}{2} t}.$$

Vzpomeňme si na 1. příklad z 5. slidu.