Příklady pro MA2

Derivace a diferenciál.

1. Nalezněte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pro následující funkce:

   (a) $f = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$,

   (b) $f = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

   (c) $f = (1+\sin^2 x)^{\ln y}$.

   Výsledky:
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$.
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y\ (1+\sin^2 x)^{\ln y - 1}\sin 2x$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (1+\sin^2 x)^{\ln y}\ \dfrac{1}{y}\ln(1+\sin^2 x)$.

2. Nalezněte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ pro následující funkce:

   (a) $f = \dfrac{y}{z} + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}$,

   (b) $f = z^{xy}$,

   (c) $f = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

   Výsledky:
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{y}{z^2}$,
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z^{xy} y \ln z$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} z^{xy} x \ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy\, z^{xy-1}$,
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z \ln\dfrac{x}{y}$.

3. Nalezněte diferenciály funkce v zadaném bodě.

   (a) $f = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $A = (1, 1)$,

   (b) $f = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1 + x^2}$, $A = (1, -1)$,

   (c) $f = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$, $A = (1, 1, 1)$,

   (d) $f = \ln(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, $A = (1, 2, \ldots, n)$.

   Výsledky:
   (a) $df[h_1, h_2] = h_1 - h_2$,
   (b) $df[h_1, h_2] = \frac{2}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2$,
   (c) $df[h_1, h_2, h_3] = 2h_1 + h_3 \ln 4$,
   (d) $df[h_1, \ldots, h_n] = \dfrac{2}{n(n+1)}\big(h_1 + \cdots + h_n\big)$.

4. Nalezněte tečné (nad)roviny k funkcím v zadaném bodě.

   (a) $z = x \sin(x + y)$, $A = (-1, 1, ?)$,

   (b) $z = 1 + x^2 y^3$, $A = (-1, 1, ?)$,

   (c) $z = yx^y$, $A = (2, 1, ?)$,

   (d) $u = e^{x+xy+xyz}$, $A = (1, -1, -2, ?)$.

   (e) $z^3 + 3xyz + 1 = 0$, $A = (0, 1, ?)$,

   (f) $e^z - xyz - 2 = 0$, $A(1, 0, ?)$,

   (g) $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$, $A = (2, -1, ?)$,

   (h) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$, $A = (0, 1, 0)$,

   (i) $x + y + z = e^{xyz}$, $A = (0, 0, 1)$.

   Výsledky:
   (a) $x + y + z = 0$,
   (b) $2x - 3y + z + 3 = 0$,
   (c) $x + y(2 + 2\ln 2) - z - (2 + 2\ln 2) = 0$,
   (d) $e^2(-2x + y + z) + u + 4e^2 = 0$,
   (e) $-x + z + 1 = 0$,
   (f) $y \ln 2 - 2z + 2\ln 2 = 0$,

(g) $x + 2y + 5z = 0$,
(h) $x \cos 1 + y + z - 1 = 0$,
(i) $x + y + z = 1$.

5. Nalezněte úhel pod kterým se protínají grafy daných funkcí v zadaném bodě.

   (a) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $A = (1, 0, ?)$
   (b) $zx + 2y^2 - 2 = 0$, $z = 2x^2 + y^2$, $A = (1, 0, 2)$.
   (c) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$, $A = (1, 1, 2)$

   Výsledky:
   (a) $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{38}}$, tj. $\alpha \approx 50°$.
   (b) $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{85}}$, tj. $\alpha \approx 41°$.
   (c) $\cos\alpha = 1$, tj. $\alpha = 0$.

6. Zjistěte hodnotu parametru s, aby se plochy $x^2 + y^2 + (z - s)^2 = 18$ a $z = x^2 + y^2$ protínaly pod úhlem $\frac{1}{2}\pi$.

   Výsledek: $s = -2$.

7. Nalezněte tečnou rovinu k ploše S, která je rovnoběžná se zadanou rovinou ϱ.

   (a) plocha S: $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ a rovina ϱ: $2x + 2y + z = 0$,
   (b) plocha S: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ a rovina ϱ: $x + y - z = 0$.

   Výsledky:
   (a) $2x + 2y + z \pm 4 = 0$.
   (b) Žádná taková tečná rovina neexistuje.

8. Nalezněte tečné přímky ke křivkám zadaným jako průnik dvou ploch v předepsaném bodě.

   (a) plochy $xyz = 1$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ a bod $A = (1, 1, 1)$.
   (b) plochy $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - z = 0$ a bod $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

Výsledky:

(a) $(1,-2,1)t+A,\ t\in\mathbb{R}$.

(b) $(-1,1,0)t+A,\ t\in\mathbb{R}$.

9. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $S:\ x^2+2y^2+3z^2=6$, která je

   (a) rovnoběžná s rovinou $x-2y+3z=0$.
   (b) kolmá na roviny $2x-y+z=0$ a $2x-y-5z=0$.
   (c) kolmá na rovinu $x\sqrt{2}-y\sqrt{3}+z\sqrt{2}=0$ a kolmá na tečnou rovinu k ploše S v bodě $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3,0,-1)$.

   Výsledky:

   (a) $x-2y+3z\pm 6=0$,

   (b) $x+2y\pm 3\sqrt{2}=0$.

   (c) Tečná rovina k S v bodě A má rovnici $x-z-2\sqrt{2}=0$ a hledaná tečná rovina je $x+2y\sqrt{2/3}+z-4=0$.

10. Ukažte, že všechny tečné roviny k ploše zadané $z-x\sin\dfrac{y}{x}=0$ se protínají v jednom bodě.

    Výsledek: Procházejí počátkem.

Extrémy funkcí.

Lokální extrémy, stručný postup a ilustrace.

Máme vyšetřit lokální extrémy funkce $f=x^3+3xy^2-39x-36y-6$.

1. Zjistíme stacionární body, tj. body, kde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

V našem případě to jsou rovnice $x^2+y^2=13$ a $xy=6$. Jejich řešením jsou čtyři stacionární body $(\pm3,\pm2)$ a $(\pm2,\pm3)$.

2. Abychom zjistili, zda se v nich nabývá nějaký extrém funkce f, sestavíme tzv. Hessovu matici (nebo krátce hessián):

$$\mathbb{H}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2}\end{pmatrix}.$$

Pro zadanou funkci f je to matice

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{H}$ jsou $D_1 = x$ a $D_2 = x^2 - y^2$. Existenci extrémů posoudíme podle následujícího kritéria:

• Jsou-li všechny hlavní subdeterminanty v daném bodě > 0, má f v tomto bodě minimum.

• Střídají-li hlavní subdeterminanty v daném bodě znaménko s tím, že první subdeterminant $D_1 < 0$, má f v tomto bodě maximum.

• Je-li $\det \mathbb{H} \neq 0$ v daném bodě a neplatí-li ani jedno z výše uvedených pravidel, je v příslušný bod sedlový.

V našem příkladě platí v bodě $(3, 2)$, že $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$, jde tedy o lokální minimum. V bodě $(-3, -2)$ je $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$, jde tedy o lokální maximum. Zbylé body jsou sedlové.

1. Vyšetřete lokální extrémy následujících funkcí.

   (a) $f = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$,

   (b) $f = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$,

   (c) $f = \dfrac{x+y}{xy} - xy$,

   (d) $f = (x + y^2)e^{x/2}$,

   (e) $f = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$,

   (f) $f = x^3 + xy^2 - 6xy = 0$,

   (g) $f = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + y^2)$,

   (h) $f = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$,

   (i) $f = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x} + x$,

   (j) $f = y + \dfrac{x^2}{4y} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{2}{z}$.

   Výsledky:

   (a) f má jediný stacionární bod: $(7, -2)$ - minimum.
   (b) f má dva stacionární body: $(1, 2)$ - minimum, $(-1, -2)$ - maximum.

(c) f má jediný stacionární bod: $(-1,-1)$ - maximum.
(d) f má jediný stacionární bod: $(-2,0)$ - minimum.
(e) f má 9 stacionárních bodů: $(0,0)$ - maximum, $(\pm 1/2, \pm 1)$ a $(\mp 1/2, \pm 1)$ jsou minima, zbylé body $(\pm 1/2, 0)$ a $(0, \pm 1)$ jsou sedlové.
(f) f má 4 stacionární body: $(\sqrt{3}, 3)$ - minimum, $(-\sqrt{3}, 3)$ - maximum, body $(0,0)$ a $(0,6)$ jsou sedlové,
(g) f má 5 stacionárních bodů: $(0,0)$ - minimum, $(\pm 1, 0)$ - maximum, $(0, \pm 1)$ - sedlové body.
(h) f má 3 stacionární body: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ - minima, $(0,0)$ nelze určit pomocí kritérií, ale po přímce $y = x$ je v bodě $(0,0)$ minimum a po přímce $y = 0$ je v bodě $(0,0)$ lokální maximum, tj. v $(0,0)$ není extrém.
(i) f má 2 stacionární body: $(1,1,1)$ - minimum, $(-1,1,-1)$ - maximum,
(j) f má 2 stacionární body: $(1, \frac{1}{2}, 1)$ - minimum, $(-1, -\frac{1}{2}, -1)$ - maximum.

Vázané extrémy, stručný postup a ilustrace.

Vyšetříme extrémy funkce $f = x^2 y$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Množina M je zadaná vazebnou podmínkou $g(x,y) = 0$, kde $g = x^2 + y^2 - 1$. Sestavíme tzv. Lagrangeovu funkci $L = f + \lambda g$, v našem příkladě

$$L = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vypočteme stacionární body funkce L, tj. řešíme následující rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Konkrétně, $2xy + 2\lambda y = 0$, $x^2 + 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Řešením je šest bodů $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ a $(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$. Protože množina M je uzavřená a omezená, funkce f na ní nabývá minima i maxima. Stačí jen dosadit vypočtené body do funkce f a zjistit, kde má nejmenší a největší hodnotu. Závěr: Maximum je v bodech $(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3})$ a minimum v bodech $(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$.

2. Vyšetřete extrémy funkce f na zadané množině M.

   (a) $f = y^2 - x^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$,

(b) $f = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,

(c) $f = e^{x^2 y}$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3y^2 = 3\}$,

(d) $f = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 = 1\}$,

(e) $f = \cos^2 x + \cos^2 y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x - y = \frac{1}{4}\pi\}$,

(f) $f = x - 2y + 2z$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$,

(g) $f = xyz$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$,

Výsledky:

(a) $(0, \pm 1)$ - maximum, $(\pm 2, 0)$ - minimum,
(b) v bodech $(1, 1)$ a $(-1, -1)$ je minimum, maximum neexistuje, neboť funkce f je shora neomezená na M.
(c) v bodech $(\pm\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$ jsou maxima a v bodech $(\pm\sqrt{2}, -1/\sqrt{3})$ jsou minima.
(d) v bodech $(0, \pm 1)$ a $(\pm 1, 0)$ je minimum a v bodech $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ a $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ je maximum.
(e) body extrémů jsou $(\frac{1}{2}\pi k + \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi k - \frac{1}{8}\pi)$, pro k sudé to jsou maxima a pro k liché minima,
(f) $(-1, 2, -2)$ - minimum, $(1, -2, 2)$ - maximum,
(g) extrémy jsou v bodech (t_1, t_2, t_3), kde $t_i \in \{-1, 1\}$; maxima jsou tam, kde má bod sudý počet záporných souřadnic a minima v bodech s lichým počtem záporných souřadnic.

3. Nalezněte největší objem kvádru víme-li, že

   (a) velikost jeho povrchu je S.

   (b) velikost součtu délek všech jeho stran je a.

   (c) délka tělesové uhlopříčky je d.

   (d) velikost povrchu bez horní stěny je S_0.

   (e) spodní stěna leží v rovině xy a je vepsaný do vnitřku paraboloidu $4x^2 + y^2 + z = 1$.

   (f) kvádr Q je typu $Q = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle 0, c\rangle$ a vrchol (a, b, c) leží v rovině $2x + y + 3z = 3$.

Výsledek:

Délky hran kvádru označíme x, y, z.

(a) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2yx - S)$. Největší objem je pro $x = y = z = \sqrt{S/6}$.
(b) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(4x + 4y + 4z - a)$. Největší objem je pro $x = y = z = \frac{1}{12}a$.
(c) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - d^2)$. Největší objem je pro $x = y = z = \sqrt{d/3}$.
(d) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda(xy + 2yz + 2xz)$. Největší objem je pro $x = y = \sqrt{S_0/3}$ a výšku $z = \frac{1}{2}\sqrt{S_0/3}$.
(e) Lagrangeova funkce je $L = xyz + \lambda\left(4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z - 1\right)$. Největší objem je pro $x = 1/2$, $y = 1$ a výšku $z = 1/2$.
(f) Lagrangeova funkce je $L = abc + \lambda(2a + b + 3c - 3)$. Největší objem je pro $a = 1/2$, $b = 1$, $c = 1/3$.

4. (Jen pro zájemce.) Mějme kvádr Q typu $Q = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle 0, c\rangle$ daného objemu V_0. Na kvádr svítí světlo, jehož paprsky mají směr vektoru $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Nalezněte rozměry a, b, c, aby neosvětlená část roviny xy měla co nejmenší obsah.

   Výsledek:

   Obecně je obsah neosvětlené části $S = ab + (ac + bc)/\sqrt{2}$. Lagrangeova funkce je tak $L = S + \lambda(abc - V_0)$. Minimální hodnota velikosti neosvětlené části je při $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2V_0)^{1/3}$, $c = (2V_0)^{1/3}$ a je rovna $\frac{3}{2}(2V_0)^{2/3}$. Funkce S je na množině $abc = V_0$ shora neomezená.

5. Mějme kužel $z = h - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, kde h je jeho výška. Vepište do něj

   (a) válec s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

   (b) kvádr s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

   Výsledky:

   (a) Poloměr podstavy označíme r a výšku válce v. Lagrangeova funkce je $L = \pi r^2 v + \lambda(v + r - h)$. Největší objem je při $r = \frac{2}{3}h$ a $v = \frac{1}{3}h$.
   (b) Délky hran kvádru si označíme a, b, c. Lagrangeova funkce je tak $L = abc + \lambda(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + c - h)$ Největší objem je pro $a = b = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,h$ a výška $c = \frac{1}{3}h$.

6. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y, z) = 2y + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 = 4\}$.

   Výsledek:

   Lagrangeova funkce je $L = 2y + z + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 4)$. Při více vazebných podmínkách jsou stacionární body funkce L řešením soustavy

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0.$$

   V našem případě jsou stacionární body $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Dosazením do f zjistíme, že v prvním je minimum a ve druhém maximum.

7. Rovina $x + y + 2z = 2$ protíná paraboloid $z = x^2 + y^2$ v nějaké křivce C. Nalezněte na křivce C bod nejblíže a nejdále od počátku.

   Výsledek:

   Lagrangeova funkce je $L = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+2z-2)+\lambda_2(x^2+y^2-z)$ a její stacionární body jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $(-1, -1, 2)$. První je nejbližší a druhý je nejvzdálenější.

8. Jakou vzdálenost má přímka $y = 2x$ od křivky $x^2 - y^2 = 3$?

   Výsledek:

   Minimalizujeme vzdálenost dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2), kde první leží na přímce a druhý na křivce, tj. hledáme minimum funkce čtyř proměnných $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Lagrangeova funkce je tak

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \lambda_1(y_1 - 2x_1) + \lambda_2(x_2^2 - y_2^2 - 3).$$

   Její stacionární body jsou $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \pm(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 2, 1)$ a vzdálenost přímky od křivky je $\sqrt{(\frac{4}{5} - 2)^2 + (\frac{8}{5} - 1)^2} = 3/\sqrt{5}$.

9. (Jen pro opravdové zájemce.) Mějme elipsu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, která obsahuje ve svém vnitřku kružnici o rovnici $(x-s)^2 + y^2 = s^2$. Pro které hodnoty a, b bude tato elipsa ohraničovat nejmenší plochu?

Výsledek:

Bod (x_0, y_0), kde se kružnice a elipsa dotýkají splňuje

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,\ (x_0 - s)^2 + y_0^2 = s^2,\ \frac{x_0}{a^2} = \alpha(x_0 - 2),\ \frac{y_0}{b^2} = \alpha y_0.$$

(Druhé dvě podmínky vyjadřují, že normály k elipse i ke kružnici jsou rovnoběžné.) Jsou to čtyři rovnice pro tři proměnné x_0, y_0, α. Aby měly řešení je nutné splnění podmínky $s^2a^2 = b^2(a^2 - b^2)$. Lagrangeova funkce je tak $L = \pi ab + \lambda(s^2a^2 - b^2(a^2 - b^2))$. Hledané hodnoty jsou $a = 3s/\sqrt{2}$, $b = s\sqrt{3/2}$ a obsah $\frac{3}{2}\pi s^2\sqrt{3}$.

Dvojný integrál.

1. Vypočtěte následující integrály tak, že napíšete obě pořadí integrace a jedno z nich dopočtete.

   (a) $\iint_D \frac{y}{x^2},\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x^3 \le y \le x^2\};$

   (b) $\iint_D x^2y^2,\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y^2 \le x \le 1\};$

   (c) $\iint_D \min\{x, y\},\quad D = \langle 0, a\rangle^2,\ a > 0;$

   (d) $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2},\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in \langle 0, \pi/4\rangle,\ x \operatorname{tg} x \le y \le x\};$

   (e) $\iint_D x + 2y,\quad D$ je omezená přímkami $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$ a $x = 3$;

   (f) $\iint_D |\sin x - y|,\quad D = \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$

   Výsledky:

   (a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f\,dydx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,dxdy = \frac{1}{15};$

   (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f\,dydx = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 f\,dxdy = \frac{4}{27};$

   (c) $\int_0^a\int_0^x y\,dydx + \int_0^a\int_x^a x\,dydx = \int_0^a\int_0^y x\,dxdy + \int_0^a\int_y^a y\,dxdy = \frac{a^3}{3};$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{x} f\,dydx = \int_0^1\int_y^{h^{-1}(y)} f\,dxdy = \frac{\pi^2}{32}$, kde $h(x) = x\operatorname{tg} x$;

(e) $\displaystyle\int_2^3\int_x^{2x} f\,dydx = \int_2^3\int_2^{y} f\,dxdy + \int_3^4\int_2^{3} f\,dxdy + \int_4^6\int_{y/2}^{3} f\,dxdy = \frac{76}{3}$;

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x}(\sin x - y)\,dydx + \int_0^{\pi}\int_{\sin x}^{1}(\sin x - y)\,dydx$

$\displaystyle= \int_0^1\int_0^{\arcsin y}(y-\sin x)dxdy + \int_0^1\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}(y-\sin x)dxdy +$

$\displaystyle+ \int_0^1\int_{\arcsin x}^{\pi-\arcsin x}(\sin x - y)\,dxdy = \pi - 2.$

2. Napište následující integrály v opačném pořadí integrace.

(a) $\displaystyle\int_0^4\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f\;dydx$;

(b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{3-y} f\;dxdy$;

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{a} f\;dydx$, kde $a = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4x})$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f\;dxdy + \int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f\;dxdy$;

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{\cos x} f\;dydx$;

(f) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{\cos x}^{\sin x} f\;dydx$;

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f\;dydx$;

Výsledky:

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^{2y} f\;dxdy$;

(b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{3-x} f\;dydx$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y+y^2} f \ dxdy$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-x}^{x} f \ dydx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f \ dydx$;

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\arccos y}^{\arccos y} f \ dxdy$;

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{\arccos y}^{\pi} f \ dxdy + \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi-\arcsin y} f \ dxdy$;

(g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f \ dxdy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f \ dxdy$.

3. Načrtněte obrázek množiny D a pomocí polárních souřadnic vypočtěte $\iint_D f$.

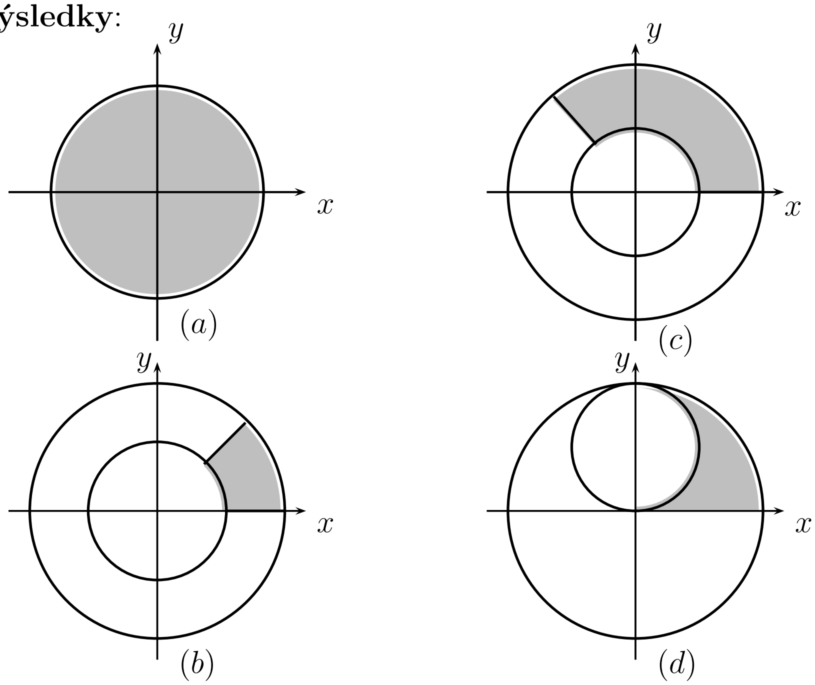
   (a) $\displaystyle\iint_D xy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$;

   (b) $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$;

   (c) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x+y \geq 0,\ y \geq 0\}$;

   (d) $\displaystyle\iint_D x$,
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+y^2-2y \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$;

Výsledky:



(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3 \varrho^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varrho d\varphi = 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_1^2 \varphi\varrho\,d\varrho d\varphi = \frac{3\pi^2}{64};$

(c) $\displaystyle\int_0^{3\pi/4}\int_{\sqrt{3}}^3 \varrho\cos\varphi\,d\varrho d\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{2};$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\varphi}^2 \varrho^2\cos\varphi\,d\varrho d\varphi = 2.$

4. Napište následující integrály v polárních souřadnicích v pořadí integrace $d\varrho d\varphi$.

   (a) $\displaystyle\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f\,dydx;$

   (b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f\,dydx;$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y}^{y} f\, dxdy;$

(d) $\displaystyle\int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{bx-x^2}} f\, dydx + \int_a^b \int_0^{\sqrt{bx-x^2}} f\, dydx,\ 0 < a < b.$

Výsledky:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{r} f \varrho, d\varrho d\varphi;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\varphi} f \varrho\, d\varrho d\varphi;$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{1/\sin\varphi} f \varrho\, d\varrho d\varphi;$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} f \varrho\, d\varrho d\varphi.$

5. Nalezněte těžiště následujících množin.

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq 2 - y\}$, hustota $f = 1$;
   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}\}$, hustota $f = 1$;
   (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2ax\}$, hustota $f = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Výsledky:
   (a) $t = (8/5, -1/2)$;
   (b) $t = (a/5, a/5)$;
   (c) $t = (6a/5, 0)$.

6. Kruhový bazén má poloměr $3\,m$. Ve směru severo-jižním je jeho hloubka konstantní a ve směru východo-západním lineárně roste z hodnoty $0.5\,m$ na východním konci k hodnotě $2.5\,m$ na západním konci. Zjistěte jaký objem vody bazén pojme.

   Výsledek:
   $V = \iint_D (\frac{x}{3} + \frac{3}{2}) = \frac{27}{2}\pi\, m^3$, kde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.

7. Horní polovinu elipsy $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ y \geq 0\right\}$ volně zavěsíme v bodě $(a, 0)$. Zjistěte, jaký úhel bude svírat spojnice bodů

$(-a, 0)$ a $(a, 0)$ se svislým směrem.

Výsledek:
K výpočtu užijeme tzv. eliptické souřadnice, což je modifikace polárních souřadnic: $\Phi = (a\varrho\cos\varphi,\ b\varrho\sin\varphi)$, $\Delta_\Phi = ab\varrho$. Těžiště je $t = (0, \frac{4b}{3\pi})$ a úhel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4b}{3\pi a}$.

8. V disku o poloměru R vyřízneme kruhový otvor s poloměrem $a/2$, $a \leq R$ tak, že se kraj otvoru dotýká středu disku. Jaký je moment setrvačnosti tohoto disku vzhledem k jeho středu, je-li plošná hustota rovna vzdálenosti od středu?

   Výsledek:
   Střed disku umístíme do počátku a střed otvoru do bodu $a/2$ na ose x. Hustota je $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ a moment setrvačnosti $I = \iint_D (x^2+y^2)^{3/2} = \dfrac{2\pi R^5}{5} - \dfrac{16a^2}{75}$, kde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \geq ax\}$.

Trojný integrál.

1. Vypočtěte následující trojné integrály, s možným využitím cylindrických nebo sférických souřadnic.

   (a) $\displaystyle\iiint_P z, \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + z \leq 2,\ x, y, z \geq 0\};$

   (b) $\displaystyle\iiint_P z, \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + 4y^2 \leq z \leq 4\};$

   (c) $\displaystyle\iiint_P y, \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 1,\ y + z \leq 1,\ x, y, z \geq 0\};$

   (d) $\displaystyle\iiint_P x^2+y^2+z^2, \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ z \geq 0\};$

   (e) $\displaystyle\iiint_P |z|, \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$

   Výsledky:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} z\, dzdydx = \frac{1}{6};$

   (b) V cylindrických souřadnicích je $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4\varrho^2}^4 z\varrho\, dzd\varrho d\varphi = \frac{16\pi}{3};$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} y \; dzdydx = \frac{1}{12}$;

(d) Ve sférických souřadnicích je $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho^4 \sin\theta \; d\varrho d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{5} r^5$;

(e) V cylindrických souřadnicích je $\displaystyle 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} z\varrho \; dz d\varrho d\varphi = \frac{7\pi}{2}$.

2. Vypočtěte hmotnost tělesa ležícího mezi dvěma sférami $x^2+y^2+z^2 = r^2$ a $x^2+y^2+z^2 = 4r^2$, je-li hustota nepřímo úměrná vzdálenosti od středu sfér s koeficientem κ.

   Výsledek:
   Ve sférických souřadnicích $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_a^{2r} \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{\varrho} \varrho^2 \sin\theta \; d\varphi d\varrho d\theta = 6\pi\kappa r^2$.

3. Těleso ležící v 1. oktantu je omezeno následujícími plochami $x+y = a$, $x+y-z+a = 0$. Zjistěte hodnotu $a > 0$, aby objem byl roven 20/3.

   Výsledek:
   $\displaystyle\int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{x+y+a} 1 \; dzdydx = \frac{5a^3}{6}$. Hledaná hodnota je $a = 2$.

4. Trojbokou pyramidu $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1,\; x,y,z \geq 0\}$ s hustotou $f = z$ rozděluje rovina $x = a$ na dvě části se stejnými hmotnostmi. Určete hodnotu a.

   Výsledek:
   Musí platit $\displaystyle\int_0^a \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \; dzdydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \; dzdydx$. Odtud $a = 1 - 1/\sqrt[4]{2}$.

5. (Jen pro zájemce). Zjistěte objem množiny, která vznikla průnikem tří na sebe kolmých válců $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$, $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \leq a^2\}$, $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 \leq a^2\}$.

   Výsledek:
   Označíme-li D čtvrtkruh s poloměrem a ležící v 1. kvadrantu, pak objem je $\displaystyle V = 8\iint_D \min\{\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2-y^2}\} = \frac{8a^3}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$.

Křivkový integrál.

1. Vypočtěte následující křivkové integrály.

   (a) $\int_C x+y+z\ ds$, kde C je helix (= šroubovice) s parametrizací $\varphi(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, $a,b\geq 0$;

   (b) $\int_C \sqrt{1+9xy}\ ds$, kde C je graf $y=x^3$, $x\in\langle 0,1\rangle$;

   (c) $\int_C xy-z^2\ ds$, kde C jsou dvě navazující úsečky, první z bodu $(0,0,1)$ do bodu $(0,2,0)$ a druhá z bodu $(0,2,0)$ do bodu $(1,1,1)$;

   (d) $\int_C (x-y)^2\ ds$, kde C je horní část kružnice $x^2+y^2=2x$, $y\geq 0$.

   Výsledky.

   (a) $\int_0^{2\pi}(a\cos t+a\sin t+bt)\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{1}{2}\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}$;

   (b) Parametrizace je $\varphi(x)=(x,x^3)$ a $\int_0^1(1+9x^4)\ dx=14/5$;

   (c) Parametrizace první úsečky je $\varphi_1(t)=(0,2t,1-t)$, $t\in\langle 0,1\rangle$ a druhé úsečky $\varphi_2(t)=(t,2-t,t)$, $t\in\langle 0,1\rangle$. Pak
   $\int_0^1 -(1-t)^2\sqrt{5}\ dt+\int_0^1\big(t(2-t)-t^2\big)\sqrt{3}\,dt=\frac{1}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$;

   (d) Parametrizace je $\varphi(t)=(1+\cos t,\sin t)$, $t\in\langle 0,\pi\rangle$ a
   $\int_0^\pi(1+\cos t-\sin t)^2 dt=2\pi-4$.

2. Drát ve tvaru šroubovice $\varphi(t)=(2\cos t,2\sin t,t^2)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ má hustot $f=\sqrt{z}$. Jaká je jeho hmotnost?

   Výsledek:

   $$\int_0^{2\pi}2t\sqrt{1+t^2}\ dt=\frac{2}{3}(\sqrt{1+4\pi^2}-1).$$

3. Základna plotu je kruh s poloměrem $5\,m$, $x^2+y^2=25$, a výška plotu v bodě (x,y) je $h(x,y)=2+\dfrac{x^2-y^2}{250}$. Pokud jeden litr barvy vystačí

na obarvení $10\,m^2$, kolik litrů je třeba k obarvení plotu z obou stran?

Výsledek:

Plocha plotu je $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(2+\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{10}\Big)5\;dt = 20\pi$, a tedy stačí $2\pi \approx 6.3\,l$ barvy.

4. Drát ve tvaru spirály C na plášti kužele má parametrizaci $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$, a hustotu $f(x,y,z) = 1/\sqrt{2+z^2}$. Nalezněte moment setrvačnosti vzhledem k ose z.

   Výsledek:

   Parametrizace je $\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ a $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2+t^2}$. Pak
   $I = \displaystyle\int_C (x^2+y^2)f\;ds = \int_0^{4\pi} t^2\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\;dt = \frac{64}{3}\pi^3.$

5. Mějme úsečku C z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,1)$. Pro které pole $\vec{F}(x,y)$ je integrál přes C nulový?

   (a) $\vec{F}(x,y) = (0,x)$;

   (b) $\vec{F}(x,y) = (x,0)$;

   (c) $\vec{F}(x,y) = (0,y)$;

   (d) $\vec{F}(x,y) = (y,0)$.

   Výsledek: Parametrizace je $\varphi(t) = (0,t)$, $t \in \langle 0,1\rangle$ a $\varphi'(t) = (0,1)$. Skalární součin $\vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 0$ v případech (a), (b) a (d). Jediný nenulový integrál je v případě (c) a jeho hodnota je $1/2$.

6. Vypočtěte následující křivkové integrály $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\,d\vec{s}$:

   (a) $\vec{F}(x,y) = (x^3, xy)$ a (C) je část kružnice $x^2+y^2 = 4$, $x,y \geq 0$, kladně orientovaná;

   (b) $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ a (C) je graf funkce $y = x^3$ vedoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y, y-z, z^2)$ a oblouk (C) má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, t^3, t^2)$, $t \in \langle 0,1\rangle$;

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, x, -y)$ a (C) je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ a $C = (0,0,1)$ orientovaný $A \to B \to C \to A$.

Výsledky:

(a) Parametrizace je $\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ a
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (-16\cos^3 t + 8\cos^2 t)\sin t\, dt = -\frac{4}{3}$;

(b) Parametrizace je $\varphi(t) = (t, t^3)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\displaystyle\int_0^1 5t^4\, dt = 1$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 (5t^5 - t^4 + 2t^3)\, dt = \frac{17}{15}$;

(d) Strana AB má parametrizaci $\varphi_1(t) = (1-t, t, 0)$, strana BC má $\varphi_2(t) = (0, 1-t, t)$ a strana CA má parametrizaci $\varphi_3(t) = (t, 0, 1-t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Dostaneme $\displaystyle\int_0^1 0\, dt + \int_0^1 (-1+t)\, dt + \int_0^1 1\, dt = \frac{1}{2}$.

7. Jakou práci vykoná pole $\vec{F}(x,y) = \dfrac{(-y, x)}{x^2+y^2}$ podél kladně orientované kružnice:

   (a) $x^2 + y^2 = a^2$;

   (b) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

   Výsledek:

   (a) Parametrizace je $\varphi(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a
   $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 2\pi$, (výsledek nezávisí na poloměru a);

   (b) Parametrizace je $\varphi(t) = (2 + \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a
   $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos t}{5 + 4\cos t}\, dt$. Tento integrál je třeba řešit substitucí $x = \mathrm{tg}\,(t/2)$.
   Tím dostaneme integrál $\displaystyle 2\int_0^{\infty} \Big(-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} \Big)\, dx = 0$.

Plošný integrál.

1. Vypočtěte následující plošné integrály.

(a) $\displaystyle\iint_M x^2\, dS$, kde M je část roviny $2x+2y+z=4$ v 1. oktantu;

(b) $\displaystyle\iint_M (x+y+z)\, dS$, kde M je část sféry $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$;

(c) $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2+z^2)\, dS$, kde M je plášť kužele $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\leq 1$;

(d) $\displaystyle\iint_M z^2\, dS$, kde $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4,\ 0\leq z\leq 1\}$;

(e) $\displaystyle\iint_M (x+z^2y)\ dS$, kde M je část válce $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 3$, ležící v 1. oktantu;

(f) $\displaystyle\iint_M (x^2+y^2)z\ dS$, kde M je část kužele $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\in\langle a,b\rangle$.

Výsledky:

(a) M je graf funkce $z=4-2x-2y$, nemusíme hledat parametrizaci; $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-x} 3x^2\ dydx=4$;

(b) M je graf funkce $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, nemusíme tak hledat parametrizaci; $\displaystyle\iint_K \frac{x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\pi$, kde K je kruh $x^2+y^2\leq\ 1$.
Pokud přesto chceme M parametrizovat, použijeme sférické souřadnice: $\Phi(\varphi,\vartheta)=(\sin\vartheta\cos\varphi,\sin\vartheta\sin\varphi,\cos\vartheta)$. Pak $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right\|=\sin\vartheta$ a dostaneme $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\big(\sin\vartheta\cos\varphi+\sin\vartheta\sin\varphi+\cos\vartheta\big)\sin\vartheta\ d\varphi d\vartheta=\pi$.

(c) $\displaystyle\iint_K (2x^2+2y^2)\sqrt{2}=\pi\sqrt{2}$, kde K je kruh $x^2+y^2\leq 1$;

(d) M je graf funkce $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, nemusíme hledat parametrizaci; $\displaystyle\iint_K \sqrt{4-x^2-y^2}=\frac{2\pi}{3}$, kde $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3\leq x^2+y^2\leq 4\}$;

(e) Pro parametrizaci plochy M užijeme cylindrické souřadnice:
$\Phi(\varphi,z)=(\cos\varphi,\sin\varphi,z)$, $(\varphi,z)\in\langle 0,\pi/2\rangle\times\langle 0,3\rangle$. Pak $\displaystyle\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\|=1$ a $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^3(\cos\varphi+z^2\sin\varphi)\ dzd\varphi=12$.

(f) Pro parametrizaci plochy M užijeme cylindrické souřadnice: $\Phi(\varphi,\varrho) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho)$, $(\varphi,\varrho) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle a, b\rangle$. Pak dostaneme $\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right\| = \sqrt{2}\varrho$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{2}\varrho^4\, d\varrho d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(b^5 - a^5)$.

2. Určete těžiště množiny $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2,\ z \geq 0\}$, je-li hustota $f = 1$.

   Výsledek:

   M je graf funkce $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, nemusíme hledat parametrizaci. Těžiště je $(0,0,t_z)$, kde $t_z = \dfrac{1}{2\pi r^2}\displaystyle\iint_M z\, dS = \dfrac{1}{2\pi r^2}\iint_K r = \dfrac{r}{2}$ a K je kruh $x^2+y^2 \leq r^2$.

3. Vypočtěte následující integrály vektorového pole $\displaystyle\iint_{(M)} \vec{F}\, d\vec{S}$.

   (a) M je kruh $x^2+y^2 \leq 4$, $z = 0$ orientovaný normálou s kladnou z-tovou složkou a $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,x^2+y^2)$.

   (b) M je část paraboloidu $z = x^2+y^2$, $z \leq 2$ s orientací v kladném směru osy z a $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, x^2+y^2)$.

   (c) M je část sféry $x^2+y^2+z^2 = r^2$ ležící v 1. oktantu s orientací směrem od počátku a $\vec{F}(x,y,z) = (x, -z, y)$.

   Výsledky:

   (a) M je graf funkce $z = 0$ nad kruhem $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$. Normála je $(0,0,1)$ a tak $\displaystyle\iint_D x^2+y^2 = 8\pi$.

   (b) Užijeme cylindrických souřadnic $\Phi(\varphi,\varrho) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2)$. Pak $\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = (-2\varrho^2\cos\varphi, -2\varrho^2\sin\varphi, \varrho)$ a máme $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3\, d\varrho d\varphi = 2\pi$.

   (c) Sférické souřadnice $\Phi(\varphi,\vartheta) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ dávají $\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = r^2(\sin^2\vartheta\cos\varphi, \sin^2\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\vartheta)$. Pak dostaneme $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^3\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\, d\vartheta d\varphi = \tfrac{1}{6}\pi r^3$.

4. Funkce $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ udává rozložení teploty v prostoru. Tepelný tok je vektorové pole $\vec{F} = -\operatorname{grad} T$. Zjistěte tepelný tok sférou

$M: \; x^2+y^2+z^2=a^2$ orientovanou vnější normálou.

Výsledek:

Tok $\vec{F}$ je $\vec{F}=-2(x,y,z)$ a

$$\iint_{(M)} \vec{F}\; d\vec{S} = -2\iint_M (x,y,z)\,\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}\,dS = 4\pi a^3.$$

Integrální věty.

1. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok pole $\vec{F}$ orientovanou plochou (M):

   (a) $\vec{F}=(0,0,\frac{1}{3}z^3)$ a plocha M je sféra $x^2+y^2+z^2=r^2$ orientovaná vnější normálou;

   (b) $\vec{F}=(x,y^2,y+z)$ a plocha M je hranice tělesa omezeného plochami $x^2+y^2=4$, $z=x$ a $z=8$ a orientovaná vnější normálou;

   (c) $\vec{F}=(xy^2+\cos z, xe^{-z}, x^2z)$ a plocha M je hranice paraboloidu $x^2+y^2\le z\le h$ orientovaná vnější normálou.

   Výsledky:

   (a) Použijeme sférické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div}\vec{F} = \int_0^{\pi}\int_0^{r}\int_0^{2\pi} \varrho^4\cos^2\theta\sin\theta\; d\varphi\, d\varrho\, d\theta = \frac{4\pi}{15}r^5;$$
   (b) Použijeme cylindrické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div}\vec{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\varrho\cos\varphi}^{8} (2+2\varrho\sin\varphi)\varrho\; dz\, d\varrho\, d\varphi = 64\pi;$$
   (c) Použijeme cylindrické souřadnice:
   $$\iiint \operatorname{div}\vec{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{h}}\int_{\varrho^2}^{h} \varrho^3\; dz\, d\varrho\, d\varphi = \frac{\pi h^3}{6}.$$

2. Pomocí Greenovy věty spočtěte integrály vektorového pole $\vec{F}$ podél orientované křivky (C):

   (a) $\vec{F}=(y^2,x^2)$ a C je hranice čtverce $\langle 0,1\rangle^2$ kladně orientovaná.

   (b) $\vec{F}=(x+y,x^2-y)$ a C je hranice oblasti omezené křivkami $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0,1\rangle$, kladně orientovaná.

   (c) $\vec{F}=(xy^2,2x^2y)$ a C je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(2,2)$ a $(2,4)$, kladně orientovaný.

(d) Vhodnou volbou pole $\vec{F}$ zjistěte obsah množiny ohraničené křivkou s parametrizací $\varphi(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ kladně orientovanou.

(e) Vhodnou volbou pole $\vec{F}$ zjistěte obsah množiny ohraničené kladně orientovanou křivkou skládající se z oblouku $\varphi(t) = (t - t^2, e^t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a osy y.

Výsledky:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 2x - 2y \; dxdy = 0$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2x - 1 \; dydx = -\frac{1}{30}$;

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^{2x} 2xy \; dydx = 12$;

(d) Volíme např. $\vec{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$ (nebo $\vec{F} = (0, x)$ nebo $\vec{F} = (-y, 0)$). Pak obsah je $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \pi ab.$

(d) Nejvýhodnější volba je $\vec{F} = (-y, 0)$. Křivka se skládá z oblouku C s parametrizací φ a z úsečky na ose y od bodu $(0, e)$ do bodu $(0, 1)$. $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_0^1 e^t(1 - 2t)\, dt = 3 - e$. Integrál přes úsečku je nulový, neboť $\vec{F}$ je kolmé na úsečku. Tím obsah $= 3 - e$.

3. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte tok pole rot $\vec{F}$ zadanou plochou M:

(a) $\vec{F} = (x^2z^2, y^2z^2, xyz)$ a plocha je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = r^2$ orientovaná normálou směřující dolu.

(b) $\vec{F} = (y, y - x, z^2)$ a M je část sféry $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ ležící nad rovinou xy a orientované vnější normálou.

Výsledky:

(a) Parametrizace křivky (C) je $\varphi(t) = (-r\cos t, r\sin t, r^2)$ a
$\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} r^4(\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t) dt = 0.$

(b) Parametrizace křivky (C) je $\varphi(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ a
$$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = 9\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sin t\cos t - \cos^2 t)dt = -18\pi.$$

4. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál pole $\vec{F}$ podél orientované křivky (C):

   (a) $\vec{F} = (2z + x, y - z, x + y)$ a C je obvod trojúhelníka s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ orientovaný podle uvedeného pořadí vrcholů.

   (b) $\vec{F} = (-y, x, 2z^2)$ a C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ v rovině $z = 2$.

   (c) $\vec{F} = (x, y, xy)$ a křivka C je kraj plochy paraboloidu $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 \le 4$ a orientovaného normálou s kladnou z-tovou souřadnicí.

   Výsledky:

   (a) $\operatorname{rot} F = (2,1,0)$ a $\displaystyle\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D (2,1,0)\cdot(1,1,1) = \frac{3}{2}$, kde D je trojúhelník $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \le 1,\ x, y \ge 0\}$.

   (b) K použití Stokesovy věty je třeba si ještě zvolit plochu M, jejíž kraj je daná kružnice: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ z = 2\}$ s orientací $\vec{n} = (0,0,1)$. Protože $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,2)$, máme
   $$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = 2\pi a^2.$$

   (c) Plocha M s daným krajem C je graf funkce $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ nad kruhem $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$. Normálový vektor ke grafu je $\vec{n} = (-x/2, -2y/9, 1)$ a $\operatorname{rot}\vec{F} = (x, -y, 0)$. Pak
   $$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D (x, -y, 0)\cdot(-x/2, -2y/9, 1) = -\frac{10}{9}\pi.$$

Potenciální pole.

1. Zjistěte, která z následujících polí jsou potenciální a v kladném případě nalezněte jejich potenciál.

   (a) $\vec{F} = (2xy^2 + 2, 2yx^2 + 3y^2)$;

(b) $\vec{F} = (x^3 - y, x - y^3)$;

(c) $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2+2)^2}, \dfrac{y}{(x^2+y^2+2)^2}\right)$;

(d) $\vec{F} = (x, -2y, 3z)$;

(e) $\vec{F} = (xz, yz, xy)$;

(f) $\vec{F} = (1 + yz\cos xy, xz\cos xy, -2z + \sin xy)$.

Výsledky:

(a) $f = x^2y^2 + 2x + y^3 + C$;

(b) Není potenciální.

(c) $f = -\dfrac{1}{2(x^2+y^2+2)} + C$;

(d) $f = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \frac{3}{2}z^2 + C$;

(e) Není potenciální.

(f) $f = z\sin xy + x - z^2 + C$.

2. Pro které hodnoty a, b je pole $\vec{F} = (-xy + x, ax^2 + by)$ potenciální? Nalezněte jeho potenciál.

   Výsledek:

   Podmínka je $2ax = -x$, tj, $a = -\frac{1}{2}$. Hodnota b je libovolná. Potenciál $f = \frac{1}{2}x^2(1-y) + \frac{1}{2}by^2 + C$.

3. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby pole $\vec{F} = (e^y + y\sin x, g(x) + xe^y)$ bylo potenciální. Určete jeho potenciál.

   Výsledek:

   $g(x) = -\cos x$ a potenciál je $f = xe^y - y\cos x + C$.

Mocninné řady.

1. Nalezněte střed a poloměr konvergence následujících mocninných řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^5 6^{-n/2}(x+3)^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{\sqrt{n}}(2x-3)^n$;

(d) $\displaystyle !\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x+2)^{n^2}$.

Výsledky:

(a) $x_0 = 0$, $R = 0$; (b) $x_0 = -3$, $R = \sqrt{6}$; (c) $x_0 = 3/2$, $R = 1/2$; (d) $x_0 = -2$, $R = 1$.