Diferenciální počet funkcí více proměnných.

Jan Hamhalter,
Jaroslav Tišer

Katedra matematiky
Fakulta elektrotechnická
České Vysoké Učení Technické
Praha

Obsah

Kapitola 1

Euklidovské prostory

Hlavním cílem této učebnice je studium vlastností funkcí závisících obecně na n proměnných. Takové funkce jsou definovány na n-rozměrném prostoru nebo na jisté jeho podmnožině. V případě funkce jedné proměnné je definičním oborem nejčastěji interval. Na příkladech v další kapitole uvidíme, že definiční obory běžných funkcí více proměnných jsou mnohem komplikovanější a jejich matematický popis vyžaduje nové pojmy. Naším prvním úkolem bude proto seznámit se se základními vlastnostmi vícerozměrných prostorů a jejich podmnožin.

1 Euklidovské prostory

Symbolem $\mathbb{R}^n$ budeme v dalším označovat n-násobný kartézský součin $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel. Tato množina tvoří n-rozměrný prostor. Např. $\mathbb{R}^2$ označuje dvojrozměrný prostor, tj. rovinu. Jednotlivé prvky množiny $\mathbb{R}^n$ budeme označovat tučnými symboly $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, apod. V souřadnicovém vyjádření pro ně používáme zápis $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Čísla $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme po řadě první až n-tou souřadnicí. V případě $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ budeme často dávat přednost označení souřadnic $\boldsymbol{x} = (x, y)$ a $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ místo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Prvky kartézského součinu $\mathbb{R}^n$ se nazývají body nebo vektory. Jde o různá označení téhož. Pojmenování vektor užíváme v situaci, kdy chceme zdůraznit směr, který takový prvek $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ určuje: v tom případě se na $\boldsymbol{x}$ díváme jako na vektor začínající v počátku $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ a končící v bodě $\boldsymbol{x}$.

Na množině $\mathbb{R}^n$ jsou definovány operace sčítání a násobení skalárem (tj. reálným číslem) následujícím způsobem: Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dva prvky $\mathbb{R}^n$, pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \boldsymbol{x} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ jde o běžné sčítání a násobky vektorů, které známe z fyziky.

Kromě těchto operací máme ještě skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, který je definován vztahem

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Právě zavedené operace se souhrně nazývají *algebraické operace* na množině $\mathbb{R}^n$. Tyto jsou hlavním předmětem Lineární algebry. Nás kromě této algebraické struktury zajímá ještě jiná vlastnost prostoru $\mathbb{R}^n$, tzv. struktura *metrická*. Je to struktura závislá na definování pojmu vzdálenosti mezi dvěma body. Podívejme se nejdříve na vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}$ od počátku souřadnicového systému, tedy od bodu $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Je-li například $n = 2$, víme z Pythagorovy věty, že vzdálenost bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ od počátku je rovna $\sqrt{x^2 + y^2}$. V $\mathbb{R}^3$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od počátku $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tato skutečnost je vodítkem pro obecnou definici. *Velikostí (normou)* vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme číslo $\|\boldsymbol{x}\|$ definované vztahem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Snadno můžeme ověřit, že skalární násobek se z normy vytýká v absolutní hodnotě:

$$\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \quad \text{pro každé } \lambda \in \mathbb{R}.$$

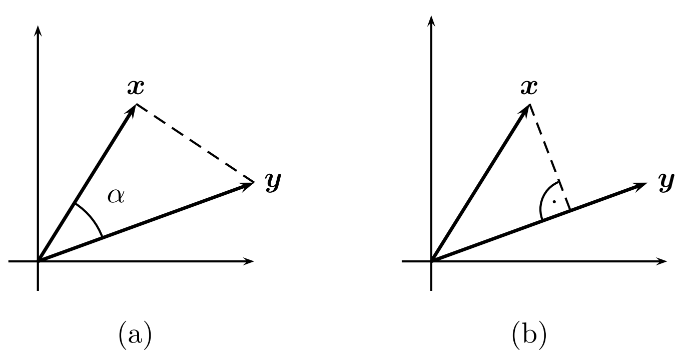
Obzvlášť důležitý je geometrický význam velikosti rozdílu $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ prvků $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Označuje totiž jejich vzdálenost. Důležitá, i když jednoduchá, je souvislost mezi velikostí vektoru a skalárním součinem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}. \tag{1.1}$$

Skalární součin má rovněž geometrickou interpretaci. Mějme dva nenulové vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Pak

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\alpha, \ \text{tj.} \ \cos\alpha = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}, \tag{1.2}$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Abychom si to ověřili, uvažujme trojúhelník na obr.1.1(a).



Obr. 1.1

Délky stran jsou $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{y}\|$ a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Kosinová věta v této situaci dává, že

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\alpha.$$

Použijeme vztah (1.1) pro druhé mocniny norem a dostaneme

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} - 2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\alpha.$$

Roznásobením a úpravou přejde rovnice na tvar

$$-2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -2\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \cos\alpha,$$

což je ekvivalentní s (1.2). Ve specielním případě, kdy jeden vektor je jednotkový, např. $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, nám skalární součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ udává velikost projekce vektoru $\boldsymbol{x}$ do směru vektoru $\boldsymbol{y}$, viz obr.1.1(b). Užitečný důsledek je, že nenulové vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou na sebe kolmé právě, když jejich skalární součin je nulový.

Následující Věta uvádí základní nerovnosti pro normy vektorů, které budeme často používat.

Věta 1.1. *Pro každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí*

(i) *Velikost vektoru je větší nebo rovna velikosti jeho složek, $|x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|$, $i = 1, \ldots, n$;*

(ii) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$ *(Schwarzova nerovnost);*

(iii) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Důkaz. (i) Tato nerovnost je zcela jasná z definice normy vektoru.

(ii) Platnost je zcela zřejmá ze vztahu (1.2). Ukážeme si ale ještě jiný důkaz, kde použijeme jednoduchý (ale poučný) obrat s kvadratickou nerovností. Vztah (1.1) říká, že pro každá pevně zvolená $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a každé reálné číslo $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \geq 0.$$

Roznásobením činitelů v této nerovnosti dostaneme

$$t^2 \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2t(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) \geq 0,$$

neboli

$$t^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0.$$

Výraz na levé straně nerovnosti je kvadratická funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Protože je stále nezáporná, může mít buď jeden dvojnásobný kořen nebo nemá reálný kořen vůbec žádný. Diskriminant příslušného kvadratického výrazu je proto menší nebo roven nule.

$$D = 4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0.$$

Odtud

$$4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq 4\|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Vydělením 4 a odmocněním pak získáváme požadovanou nerovnost.

(iii) Trojúhelníková nerovnost je jednoduchým důsledkem nerovnosti Schwarzovy. Platí totiž opět podle (1.1)

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Proto

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.$$

Odmocněním pak dostáváme trojúhelníkovou nerovnost, což ukončuje důkaz. $\square$

Jak naznačuje terminologie má nerovnost (iii) geometrický význam. Vezměme si pro ilustraci trojúhelník, jehož vrcholy jsou body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. Velikosti stran jsou pak vzdálenosti mezi vrcholy — tedy čísla $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|, \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$. Nerovnost (iii) Věty 1.1 implikuje

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|.$$

Velikost každé strany trojúhelníka je nejvýše rovna součtu velikostí dvou zbylých stran.

Množina $\mathbb{R}^n$, ve které máme zavedeny výše zmíněné algebraické operace a definován skalární součin, se nazývá *euklidovský prostor*. (Euklidés z Alexandrie žil na přelomu 4. a 3. století před naším letopočtem. Mezi jeho nejznámější matematické práce patří soubor knih z názvem „Základy“, ve kterých shrnul a rozvinul velmi moderní formou veškerou geometrii své doby).

V euklidovském prostoru může být vzdálenost mezi body libovolně velká. V některých situacích se tomu chceme naopak vyhnout. Proto zavádíme pojem omezená množina.

Definice 1.2. *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je* **omezená**, *jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{x}\| \leq K$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$.*

Pro geometrickou představu si můžeme uvědomit, že podmínka v Definici 1.2 říká přesně to, že množina M se vejde do n-rozměrné koule se středem v počátku a poloměrem K.

Příklad 1.3. Mějme $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Koule ($n$-rozměrná) o středu $\boldsymbol{x}_0$ s poloměrem $a \geq 0$ je zadána

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \leq a\}.$$

Rozepíšeme-li podmínku $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \leq a$ do složek, dostaneme v případě roviny kruh

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq a^2, \tag{1.3}$$

a v případě prostoru kouli

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq a^2. \tag{1.4}$$

To jsou nerovnosti pro kruh a kouli v obecné poloze. Změníme-li nerovnosti v (1.3) a (1.4) za rovnosti, získáme popisy kružnice a povrchu koule.

Modifikací uvedených nerovností lze dospět k popisům elipsy a elipsoidu. Ty totiž vzniknou z kruhu a koule tím, že změníme měřítka a souřadných osách. Kruh i koule se deformují na elipsu a elipsoid. Matematický zápis je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Číslům $a, b, c > 0$ se říká poloosy. Jejich význam je takový, že např. na ose x jsme prohlásili za jednotkovou délku hodnotu a. Podobně pro ostatní osy.

V další definici se seznámíme s pojmem okolí bodu v euklidovském prostoru.

Definice 1.4. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Každou množinu*

$$U_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme (kruhovým) **okolím bodu $\boldsymbol{x}$**. *Každou množinu*

$$P_\delta(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$$

nazveme **prstencovým okolím** *bodu $\boldsymbol{x}$.*

Ve dvourozměrném (resp. třírozměrném) prostoru jsou okolími daného bodu všechny kruhy (resp. koule) se středem v daném bodě a poloměrem δ. Okolí tedy můžeme chápat jako n-rozměrnou kouli opsanou kolem bodu $\boldsymbol{x}$. Prstencové okolí se od okolí liší pouze tím, že neobsahuje svůj střed, $P_\delta(\boldsymbol{x}) = U_\delta(\boldsymbol{x}) \setminus \{\boldsymbol{x}\}$.

Někdy budeme užívat stručnější zápis $U(\boldsymbol{x})$, $P(\boldsymbol{x})$, … nebude-li nutné specifikovat velikost okolí. Pomocí pojmu okolí můžeme nyní charakterizovat polohu bodu vzhledem k množině.

Definice 1.5. *Nechť $\boldsymbol{x}$ je bod a M je množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}$ je*

(i) **vnitřním bodem** *množiny M, jestliže existuje okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ tak, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \subset M;$$

(ii) **hraničním bodem** *množiny M, jestliže pro každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí současně*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset \quad a \quad U(\boldsymbol{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset;$$

(iii) **vnějším bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \emptyset;$$

(iv) **hromadným bodem** *množiny M, jestliže pro každé prstencové okolí $P(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ platí*

$$P(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset;$$

(v) **izolovaným bodem** *množiny M, jestliže existuje takové okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$U(\boldsymbol{x}) \cap M = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Podívejme se na význam jednotlivých pojmů podrobněji. Vnitřní bod množiny M je takový bod, kolem kterého je možno opsat okolí ležící celé v dané množině. V „sousedství“ takového bodu tedy není nic jiného než body množiny M. Proto je přirozené nazývat ho bodem vnitřním. Pro hraniční bod množiny M platí, že každé jeho okolí protíná jak množinu M tak i její doplněk. Libovolně blízko hraničního bodu jsou jak body dané množiny tak i body jejího doplňku. To přesně odpovídá představě polohy na hranici.

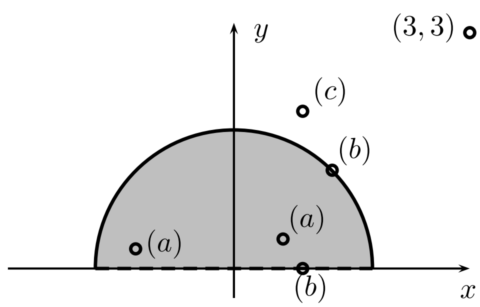
Zcela originálním způsobem vysvětloval pojem hraničního bodu prof. Eduard Čech (1893 – 1960), jeden z významných českých matematiků. Traduje se totiž, že se během přednášky neváhal vyšplhat do výše položeného okna posluchárny a demonstrovat tak svou vlastní osobou hraniční bod množiny všech bodů posluchárny. Historka o Čechově schopnosti přibližovat abstraktní pojem hraje klíčovou roli v detektivním příběhu J.Klímy „Smrt má ráda poezii“ [2]. Tato detektivka se odehrává v akademickém prostředí a čtenář v ní najde nejen důmyslnou zápletku, ale i další názorné vysvětlení pojmu hraniční bod včetně obrázkového doprovodu.

K vnějšímu bodu poznamenejme, že se nejedná o nic jiného než o vnitřní bod doplňku dané množiny. (Profesor Čech byl opatrný a demonstraci vnějšího bodu posluchárny se již vyhnul. Jedné z obětí v detektivce [2] se to bohužel nepodařilo.)

Každý bod má vůči množině právě jednu z poloh popsanou v částech (i), (ii), (iii) v Definici 1.5. Hromadný bod můžeme považovat za jakýsi „bod kondenzace“ dané množiny. V každém prstencovém okolí tohoto bodu se totiž musí nacházet alespoň jeden prvek množiny M. Z tohoto faktu ihned vyplývá, že v každém prstencovém okolí leží dokonce nekonečně mnoho bodů z množiny M: Zvolíme libovolně prstencové okolí daného hromadného bodu a v něm bod $\boldsymbol{x}_1 \in M$. Poté můžeme zvolit další prstencové okolí o poloměru menším než je vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}_1$ od středu okolí a zvolit v něm bod $\boldsymbol{x}_2 \in M$. Opakováním tohoto postupu nakonec získáme nekonečně mnoho bodů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ množiny M v původním prstencovém okolí.

Protipólem hromadného bodu je bod izolovaný. Izolované body jsou takové body, které je možno od ostatních bodů dané množiny oddělit pomocí jistého okolí. Máme-li neprázdnou množinu M, pak každý její bod je buď hromadným bodem množiny M nebo izolovaným bodem M. Všechny pojmy Definice 1.5 si budeme ilustrovat na následujícím příkladě.

Příklad 1.6. Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \cup \{(3, 3)\}$. Množina M je horní polovina jednotkového kruhu, kde hraniční polokružnice patří k množině M, ale úsečka na ose x nikoli, sjednocená s bodem $(3, 3)$, viz. obr. 1.2.



Obr. 1.2

Body na obrázku označené (a) reprezentují body vnitřní. Body označené písmenem (b) jsou příkladem hraničních bodů. Povšimněme si, že některé hraniční body (na polokružnici) patří do množiny M, zatímco jiné (na úsečce) do M nenáleží. Bod (c) je příkladem vnějšího bodu. Bod $(3, 3)$ patří do M a je izolovaným bodem. Jako každý izolovaný bod je i bodem hraničním. Body (a) a (b) jsou zároveň hromadnými body množiny M.

Definice 1.7. *Nechť M je množina v euklidovském prostoru.* **Vnitřek** *M° množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M.* **Hranice** *∂M množiny M je množina všech hraničních bodů.* **Uzávěr** *$\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.*

Příklad 1.8. Uvažujme množinu M z Příkladu 1.6. Pak

$$M^\circ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

neboť to jsou body ležící v horním polokruhu mimo ohraničující kružnici a mimo úsečky na ose x.

$$\partial M = \{(x, 0) \mid x \in \langle -1, 1\rangle\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(3, 3)\},$$

zde je to horní polokružnice s úsečkou na ose x a bodem $(3, 3)$.

$$\overline{M} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \cup \{(3, 3)\} = M^o \cup \partial M.$$

Zkusme zjistit, co je vnitřek a hranice množiny $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ racionálních čísel. To jsou čísla ve tvaru zlomku p/q, kde p je celé číslo a q přirozené. (Zbylá reálná čísla se nazývají iracionální.) Základní vlastností racionálních čísel je, že v každém neprázdném otevřeném intervalu leží jak racionální číslo, tak iracionální. Odtud ihned plyne, že vnitřek $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Dále, mějme $x \in \mathbb{R}$ libovolné. Jeho okolí, je otevřený interval se středem v x. Podle výše zmíněné vlastnosti zasahuje toto okolí jak do množiny $\mathbb{Q}$ tak mimo ni, tj. bod x je hraniční. Protože x byl libovolný bod množiny $\mathbb{R}$ je hranice $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Povšimněme si, že vnitřek M^o a hranice ∂M jsou vždy disjunktní množiny,

$$M^\circ \cap \partial M = \emptyset.$$

Množina, která má pouze vnitřní body je „otevřená“ v tom smyslu, že se od každého jejího bodu můžeme o jistý kousek vzdálit aniž množinu opustíme. Na druhé straně, obsahuje-li množina celou svoji hranici, pak ji intuitivně považujeme za uzavřenou. To je motivací následující důležité definice.

Definice 1.9. *Množina M v euklidovském prostoru je* **otevřená***, jestliže je rovna svému vnitřku. Množina M je* **uzavřená***, jestliže je rovna svému uzávěru.*

Ekvivalentně řečeno, množina je otevřená, je-li každý její bod vnitřní. Množina je uzavřená, jestliže obsahuje svoji hranici.

Příkladem otevřené množiny v $\mathbb{R}^3$ je množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ – koule se středem v počátku a poloměrem jedna bez hraniční kulové plochy. Příkladem uzavřené množiny je množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Je to koule se středem v počátku a poloměrem jedna obsahující svoji hraniční kolovou plochu. Množina M z Příkladu 1.6 obsahuje pouze část své hranice, a není proto ani otevřená ani uzavřená. Celý prostor a prázdná množina jsou vždy množiny současně otevřené i uzavřené.

Uzávěrem každé množiny vznikne množina uzavřená. Uzávěr jakékoli množiny M si můžeme představit dvěma způsoby: buď jako nejmenší uzavřenou množinu obsahující naši množinu M, nebo jako množinu, ke které přidáme její hranici.

Protože vnitřek a hranice jsou disjunktní, je množina otevřená právě tehdy, když její doplněk je uzavřený a naopak.

V dalším výkladu se chvíli zastavíme u otázky, které množiny mají hromadné body. Protože v každém okolí hromadného bodu množiny M je nekonečně mnoho dalších bodů z M, musí být množina M nekonečná. Nekonečnost sama o sobě však ještě existenci hromadného bodu nezaručí. Vezměme si například množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel jako podmnožinu euklidovského prostoru $\mathbb{R}$. Tato množina se skládá pouze z izolovaných bodů. Žádné reálné číslo tedy nemůže být jejím hromadným bodem. Přirozená čísla však tvoří neomezenou množinu, a proto nás napadne otázka, zda podobný příklad nekonečné množiny bez hromadných bodů nalezneme i mezi množinami omezenými. Odpověď je celkem překvapující – taková množina neexistuje. Znamená to například, že nekonečně mnoho bodů ve čtverci nelze rozmístit rovnoměrně tj. tak, aby se nezhušťovaly kolem nějakého bodu kondenzace. Tato důležitá vlastnost euklidovských prostorů je dokázána v následující větě.

Věta 1.10. *Každá nekonečná omezená množina v euklidovském prostoru má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Postup předvedeme v $\mathbb{R}^3$. Základní myšlenka je totiž zcela stejná i v obecném případě euklidovského prostoru.

Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená nekonečná množina. Pak existuje krychle K_1, která obsahuje množinu M, $K_1 \supset M$. Krychle K_1 je trojnásobný kartézský součin nějakého intervalu I, $K = I \times I \times I$. Interval I reprezentuje hranu krychle K_1. Rozdělíme nyní interval I na dva uzavřené intervaly stejné délky. Provedeme-li toto rozdělení na každé hraně krychle K_1, dostaneme 8 uzavřených krychlí s poloviční hranou. V jedné z těchto krychlí, označme si ji K_2, musí ležet nekonečně mnoho bodů množiny M. Tento postřeh je klíčovým pozorováním důkazu a můžeme ho zdůvodnit následujícím argumentem. Kdyby v každé z dělících krychlích, kterých je konečně mnoho, bylo pouze konečně mnoho bodů množiny M, pak by M sama byla sjednocením konečně mnoha konečných množin, a to je množina konečná. To by ovšem bylo ve sporu s předpokladem.

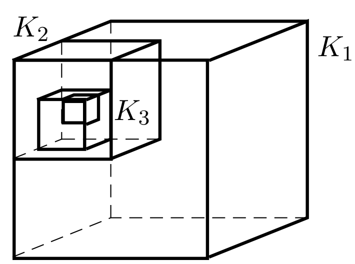
Nyní můžeme použít zcela stejnou úvahu pro krychli K_2: Rozdělíme ji na 8 krychlí s polovičními hranami a mezi nimi nalezneme krychli K_3, která obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny M. Postupným opakováním této procedury vytvoříme posloupnost do sebe vnořených krychlí

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots \supset K_i \supset K_{i+1} \cdots \tag{1.5}$$

z nichž každá obsahuje nekonečně mnoho elementů množiny M, viz obr. 1.3. Hrana i-té krychle K_i je rovna číslu

$$\frac{\text{délka}(I)}{2^{i-1}}.$$

Důležité přitom je, že délky konvergují k nule.



Obr. 1.3

Projekce jednotlivých krychlí na souřadnou osu x tvoří posloupnost do sebe vřazených uzavřených intervalů
$$\langle a_1, b_1\rangle \supset \langle a_2, b_2\rangle \supset \cdots$$
Protože jejich délky konvergují k nule, průnik obsahuje jediný bod. Označme ho x_0. Projekce krychlí na osu y a osu z tvoří podobné systémy do sebe vřazených uzavřených intervalů. Jejich průniky označme postupně y_0 a z_0. Nyní položíme $\boldsymbol{w} = (x_0, y_0, z_0)$. Bod $\boldsymbol{w}$ leží ve všech krychlích z posloupnosti (1.5), a tedy $\boldsymbol{w} \in \bigcap_i K_i$. Nyní již není těžké ověřit, že $\boldsymbol{w}$ je hledaným hromadným bodem. Zvolme okolí $U(\boldsymbol{w})$ bodu $\boldsymbol{w}$. Vzhledem k tomu, že délky stran krychlí konvergují k nule, najdeme tak malou krychli z posloupnosti (1.5), která se celá vejde do okolí $U(\boldsymbol{w})$. S touto krychlí se ovšem do $U(\boldsymbol{w})$ vejde i nekonečně mnoho prvků množiny M. Tím je důkaz ukončen. □

Předchozí typ důkazu je takový, že sice zaručuje existenci hromadného bodu, avšak nikterak nedává návod, jak takový bod najít. Není totiž možné efektivním způsobem rozhodnout, která z dílčích krychlí je ta pravá, tj. která obsahuje nekonečně mnoho bodů. Takovéto existenční důkazy (tzv. nekonstruktivní) byly a jsou terčem různých pochybovačů. V jádru všech výhrad leží nepochopení matematické logiky.

Pomocí okolí bodu můžeme zavést pojem konvergence posloupnosti prvků euklidovského prostoru. Intuitivní představa je, že má-li posloupnost $(\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots)$ konvergovat k bodu $\boldsymbol{x}$, musí se prvky $\boldsymbol{x}_n$ nacházet libovolně blízko k $\boldsymbol{x}$. Matematická formulace vyjadřuje přesně tuto představu.

Definice 1.11. *Řekneme, že* **posloupnost** $(\boldsymbol{x}_n)$ *prvků euklidovského prostoru* **konverguje k prvku $\boldsymbol{x}$**, *jestliže*
$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| = 0.$$

Označení je buď $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$ nebo krátce $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. Bod $\boldsymbol{x}$ se někdy nazývá limitní bod posloupnosti $(\boldsymbol{x}_n)$. Konvergenci posloupnosti $(\boldsymbol{x}_n)$ můžeme formulovat i pomocí okolí limitního bodu: $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ právě, když pro každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ existuje index n_0, že všechny členy posloupnosti s vyšším indexem leží v $U(\boldsymbol{x})$, tj. $\boldsymbol{x}_n \in U(\boldsymbol{x})$ pro $n \geq n_0$.

Příklad 1.12. Mějme posloupnost $\boldsymbol{x}_n = \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, (n+1)/n\big)$ bodů v rovině. Zjistíme, zda-li konverguje k nějakému limitnímu bodu. První složka má limitu
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$
Druhá složka má zřejmě limitu rovnou 1, proto posloupnost konverguje k bodu $\boldsymbol{x} = (0, 1)$.

Poučení z příkladu je, že konverguje-li posloupnost bodů k jinému bodu, konvergují i odpovídající si složky těchto bodů. Proto např. posloupnost $\boldsymbol{x}_n = \big((-1)^n, 2\big)$ nekonverguje k žádnému bodu, neboť první složky nemají limitu pro $n \to \infty$.

2 Cvičení

1. Pro jaké vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru platí $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$?

2. Pro jaké vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru platí $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$?

3. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti ukažte, že $|\,\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ (I tato nerovnost se někdy nazývá trojúhelníková, neboť je ekvivalentní s nerovností (iii) ve Větě1.1.)

4. Na základě trojúhelníkové nerovnosti stanovte horní odhad pro vzdálenost dvou bodů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v $\mathbb{R}^3$, nachází-li se $\boldsymbol{x}$ nejvýše ve vzdálenosti 2 od bodu $(1,1,1)$ a $\boldsymbol{y}$ ve vzdálenosti nejvýše 9 od bodu (100, 50, 50).

5. Odvoďte nerovnost $\|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_i\|$ pro všechny vektory $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ z daného euklidovského prostoru !

6. Diametr množiny M je číslo definované
$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in M\}.$$
Stanovte diametr množin $M = \{8\}$, $M = \langle 0,1\rangle^3$ a $M = \langle 0,1\rangle^4$. Jaký je diametr n-rozměrné krychle $\langle 0,1\rangle^n$?

Určete vnitřek, hranici a uzávěr následujících množin:

7. $M = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 \leq 3,\ x^2-4x+y^2 \leq 0\}$;

8. $M = \{(x,y,z) \mid x+y+z > 1\}$;

9. $M = \mathbb{Q}^3$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

10. Sestrojte příklady množin v $\mathbb{R}^2$, že
    (i) nemá žádný vnitřní bod,
    (ii) nemá žádný hraniční bod,
    (iii) nemá žádný vnější bod,
    (iv) nemá žádný hromadný bod,
    (v) nemá žádný izolovaný bod.

11. Ukažte, že uzávěr každé množiny je sjednocení této množiny s množinou jejích hromadných bodů.

12. Stanovte hromadné body množiny $\{(1/n, 1/m) \mid n,m \in \mathbb{N}\}$.

13. Co je doplňkem uzávěru dané množiny?

14. Ukažte, že sjednocení otevřených množin je vždy otevřená množina. Platí stejné tvrzení i pro množiny uzavřené?

15. Ukažte, že průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Platí toto tvrzení i pro nekonečně mnoho otevřených množin? Odvoďte důsledky pro uzavřené množiny.

16. Nechť M a $\boldsymbol{x}$ jsou množina a bod v euklidovském prostoru. Je přirozené definovat vzdálenost $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M)$ bodu $\boldsymbol{x}$ od množiny M následujícím způsobem

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M) = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{y} \in M\}.$$

Bod $\boldsymbol{y}_0 \in M$ se nazývá *nejbližší bod* bodu $\boldsymbol{x}$ v množině M (též nejlepší aproximace bodu $\boldsymbol{x}$ prvky množiny M), jestliže

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0\| = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M).$$

Rozhodněte, zda nejbližší bod vždy existuje.

17. (a) Ukažte, že bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je hraničním bodem množiny M právě, když

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \mathbb{R}^n \setminus M) = 0.$$

(b) Čemu je rovna množina všech bodů, jejichž vzdálenost od dané množiny je nulová?

18. Použitím Věty 1.10 ukažte, že pro každý bod $\boldsymbol{x}$ a každou omezenou uzavřenou množinu M existuje nejbližší bod k bodu $\boldsymbol{x}$ v množině M.

19. Jaké jsou obojetné, tj. současně otevřené a uzavřené množiny v eukleidovském prostoru ?

20. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ jsou body v $\mathbb{R}^3$. Definujme množinu

$$K = \Big\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \;\Big|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1 \Big\}.$$

Čemu je takováto množina rovna, neleží-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ na jedné přímce?

21. Vyšetřete konvergenci posloupností, jsou-li jejich členy dány:
(a) $\boldsymbol{x}_n = \Big(\frac{2n^2-1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}\Big)$, (b) $\boldsymbol{x}_n = \Big(\frac{n-2^n}{4\cdot 2^n}, n^{1/n}\Big)$,
(c) $\boldsymbol{x}_n = \Big(\frac{1+(-1)^n}{2}, \frac{n-\ln n}{2^n}\Big)$, (d) $\boldsymbol{x}_n = \Big(\frac{n^3+(-1)^n n}{3n^3+n^2-1}, \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big)$.

Výsledky.

1. lineárně závislé, stejně orientované; **2.** lineárně závislé; **4.** $11+\sqrt{14603}$; **6.** 0, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{n}$;
7. $M^\circ = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 < 3,\ x^2+y^2-4x < 0\}$,
$\partial M = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 = 3, x \in \langle 1/2, 1\rangle\} \cup \{(x,y) \mid x^2-4x+y^2 = 0, x \in \langle 0, 1/2\rangle\}$,
$\overline{M} = \{(x,y) \mid x^2+2x+y^2 \leq 3,\ x^2+y^2-4x \leq 0\}$;
8. $M^\circ = M$, $\partial M = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 1\}$, $\overline{M} = \{(x,y,z) \mid x+y+z \leq 1\}$; **9.** $M^\circ = \emptyset$, $\partial M = \mathbb{R}^3$, $\overline{M} = \mathbb{R}^3$; **12.** $(0,0), (1/n, 0), (0, 1/n), n \in \mathbb{N}$; **13.** vnitřek doplňku; **14.** neplatí; **15.** neplatí; **16.** nemusí existovat; **17.** uzávěru dané množiny; **19.** pouze $\emptyset$ a celý prostor; **20.** trojúhelník s vrcholy $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$; **21.** (a) $\boldsymbol{x} = (2,0)$, (b) $\boldsymbol{x} = (1/4, 1)$, (c) limita neexistuje, (d) $\boldsymbol{x} = (1/3, e)$.

Kapitola 2

Funkce více proměnných

Ve vědních i technických oborech se často setkáváme s veličinami, jejichž hodnoty závisí na větším počtu proměnných. Objem válce je závislý na poloměru podstavy a výšce, tlak plynu na teplotě a objemu, zisk ekonomického subjektu na nákladech a ceně, napětí v elektrickém obvodu na hodnotách odporů, kapacit a indukčností jeho prvků, apod. Matematický aparát pro popis takovýchto závislostí v systémech s „konečně mnoha stupni volnosti“ poskytuje teorie funkcí více proměnných. Tato kapitola je základním úvodem do problematiky.

1 Základní pojmy

Funkce n-proměnných je zobrazení $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ zobrazující jistou množinu M v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ do množiny reálných čísel. Množina M se přitom nazývá *definiční obor* funkce f, který se často označuje symbolem $D(f)$. Pokud nebude definiční obor funkce specifikován, budeme jím rozumět maximální množinu, na které může být daná funkce definována.

Je-li $\boldsymbol{x} \in D(f)$ a má-li složky $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak symbol $f(\boldsymbol{x})$ znamená stručný zápis hodnoty $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tento způsob zápisu budeme často používat.

Množina $f(M) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M\}$ se nazývá *obor hodnot* funkce f (na množině M).

Příklad 2.1. (i) Uvažujme funkci dvou proměnných

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

(Jiný způsob zápisu této funkce je pomocí rovnice $z = x^2 + y^2$. Budeme se více držet první možnosti.) Tato funkce je definována v celém euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Její obor hodnot je množina všech nezáporných čísel.

(ii) Funkce

$$f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

je funkcí tří proměnných. Je definována na množině všech trojic $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro něž je argument logaritmu kladný, tj. pro něž platí

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Definičním oborem je v tomto případě otevřená jednotková koule se středem v počátku souřadnic. Oborem hodnot je interval $(-\infty, 0\rangle$.

(iii) Funkce daná předpisem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

je funkce n-proměnných. Platí přitom

$$D(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 x_2 \ldots x_n \geq 0\}.$$

Zde je definiční obor již složitější množina. V případě roviny, tj. $n = 2$, je to 1. a 3. kvadrant. Pro prostor ($n = 3$) se $D(f)$ skládá už ze čtyř z celkového počtu osmi oktantů. V obecném $\mathbb{R}^n$ je definiční obor složen z 2^{n-1} částí a každá z nich je tvořena takovými body $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které mají přesně sudý počet záporných složek.

Obor hodnot je interval $\langle 0, \infty \rangle$.

K popisu funkcí více proměnných je často užitečné stanovit množiny, ve kterých funkce nabývají stejné hodnoty. Tyto množiny nazýváme *konstantními hladinami.* Z konkrétních situací je známe jako vrstevnice, izotermy, izobary, ekvipotenciální hladiny, apod.

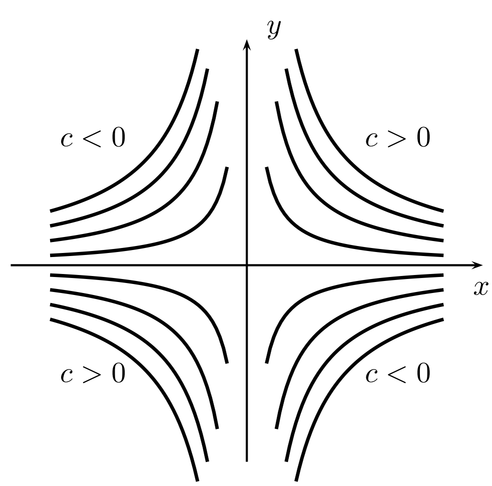
Příklad 2.2. (i) Uvažujme funkci

$$f(x, y) = xy.$$

Hladiny konstantnosti, příslušící danému $c \in \mathbb{R}$ jsou množiny

$$H_c = \{(x, y) \mid xy = c\}.$$

Pro hodnotu $c = 0$ dostáváme sjednocení souřadnicových os, pro nenulová c hyperboly mající souřadnicové osy jako asymptoty. Soustava konstantních hladin je znázorněna na obr. 2.1.



Obr. 2.1

(ii) Podívejme se na konstantní hladiny a definiční obor funkce

$$f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Výraz v argumentu funkce arcsin musí být v absolutní hodnotě nejvýše jedna. Tedy

$$D(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, (x,y) \neq (0,0) \right\}.$$

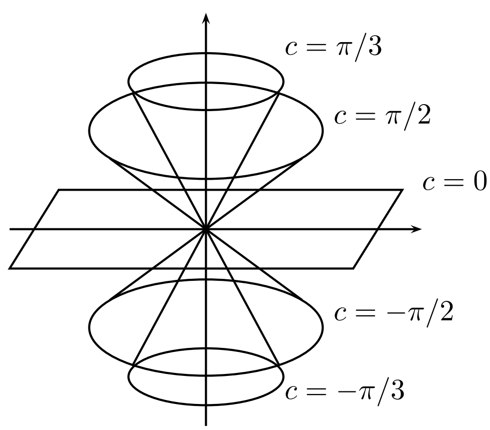
Pro body z definičního oboru proto platí, že absolutní hodnota poměru z-tové souřadnice a vzdálenosti od osy z nesmí přesáhnout hodnotu 1. Geometricky to znamená, že definiční obor je sjednocením dvou kuželů, jejichž osou je osa z , vrchol je v počátku a vrcholový úhel je pravý. Samotný počátek souřadnic přitom do definičního oboru nepatří. Obor hodnot funkce arcsin je interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Zvolme $c \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Konstantní hladina H_c příslušná této hodnotě je množina všech řešení rovnice

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

nebo ekvivalentně

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin c.$$

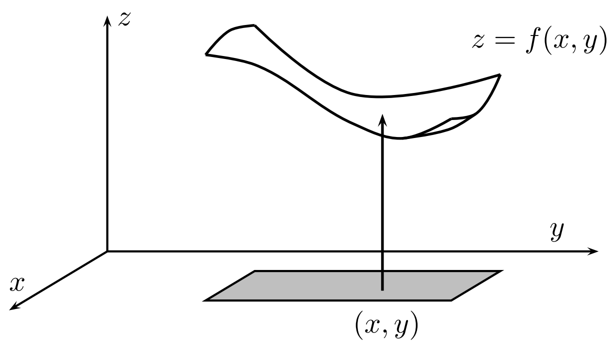
Hladina H_c je tedy kuželovou plochou s vrcholem v počátku a osou z z níž je vyjmut bod $(0,0,0)$. Výjimkou je případ $c = 0$, ve kterém dostaneme souřadnicovou rovinu xy bez počátku, viz obr. 2.2.



Obr. 2.2

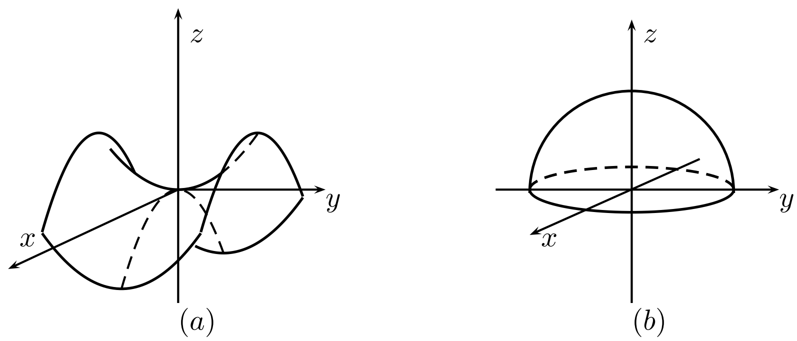
Funkce jedné proměnné bývá často znázorňována grafem v rovině. Podobným způsobem je možno geometricky vyjádřit i funkci dvou proměnných $f(x,y)$. Tentokrát ovšem v prostoru třírozměrném. Pro daný bod (x,y) v základní souřadnicové rovině xy můžeme hodnotu funkce $f(x,y)$ nanést na vertikálu procházející bodem (x,y) – viz. obr. 2.3. Získáme tak množinu $\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D(f)\}$, kterou nazýváme *grafem funkce* f. Průmět grafu do souřadnicové roviny xy je přitom definiční obor dané funkce. V případě jednodušších funkcí se často podaří stanovit graf pomocí znalostí analytické geometrie v prostoru. V komplikovanějších případech mohou pomoci počítačové programy.

Příklad 2.3. (i) Pokusme se znázornit graf funkce $f(x,y) = y^2 - x^2$. Průsečíkem grafu této funkce s rovinou xy jsou přímky $y = x$ a $y = -x$. Soustava ostatních vrstevnic je dána soustavou hyperbol, jejichž vrcholy leží na osách x a y. Řez grafu rovinou o rovnici



Obr. 2.3.

$y = 0$ je parabola $z = -x^2$. Podobně v rovině $x = 0$ je řezem parabola $z = y^2$. Tyto paraboly spolu se soustavou vrstevnic napovídají, že graf má tvar sedla znázorněného na obr. 2.4(a).



Obr. 2.4

(ii) Vyšetřujme funkci $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Definiční obor této funkce je uzavřený jednotkový kruh se středem v počátku. Graf je popsán algebraicky podmínkami

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ekvivalentně

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Odtud vidíme, že grafem je horní část kulové plochy se středem v počátku a poloměrem jedna, obr. 2.4(b).

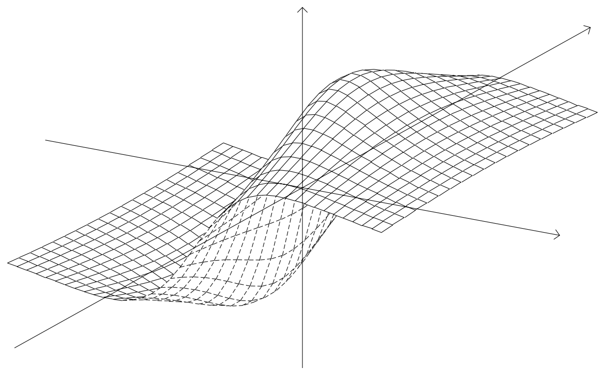
(iii) Znázorněme graf funkce

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

Funkce f je definována na celé množině $\mathbb{R}^2$. Identita

$$f(-x, -y) = -f(x, y)$$

říká, že grafem je plocha souměrná vzhledem k počátku. Použitím systému gnuplot je znázorněna na obr. 2.5.



Obr. 2.5

Kromě funkcí s více proměnnými hrají v teorii i aplikacích důležitou úlohu i obecnější objekty — zobrazení mezi euklidovskými prostory. Řešíme-li například soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, pak řešení je n-tice čísel (výstup), která závisí na n^2 koeficientech soustavy a n absolutních členech (vstup). Proces řešení tedy můžeme chápat jako zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n^2+n}$ do prostoru $\mathbb{R}^n$. Explicitní podoba tohoto zobrazení je dána Cramerovým pravidlem. Jiný příklad si můžeme vypůjčit z elementární teorie pole. Podle Newtonova gravitačního zákona můžeme gravitační pole vytvořené jednotkovým hmotným bodem umístěným v počátku popsat zobrazením $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Hodnota $F(x,y,z)$ přitom udává vektor intenzity pole v bodě (x,y,z), tj. vektor

$$F(x,y,z) = \frac{-\kappa}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x,y,z),$$

kde κ je gravitační konstanta.

Každé zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je možno reprezentovat pomocí k-tice $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ funkcí n-proměnných splňujících rovnost

$$\text{(2.1)}\quad F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \Big(F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \ldots, F_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big).$$

Funkce $F_1, \ldots, F_k$ nazýváme *složkami zobrazení* F. Zobrazení F popisující výše uvedené gravitační pole má např. složky

$$\begin{aligned}
F_1(x,y,z) &= \frac{-\kappa x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\\
F_2(x,y,z) &= \frac{-\kappa y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\\
F_3(x,y,z) &= \frac{-\kappa z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.
\end{aligned}$$

Důležitým typem zobrazení mezi euklidovskými prostory je zobrazení lineární, které je studováno v Lineární algebře. Protože tento typ zobrazení budeme často používat, připomeneme si na tom místě jeho definici a základní vlastnosti.

Lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení, které splňuje následující podmínku:

$$F(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha F(\boldsymbol{x}) + \beta F(\boldsymbol{y})$$

pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Každé lineární zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je přitom možno vyjádřit ve tvaru

$$F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.2}$$

kde $\mathbf{A}$ je jednoznačně určená matice typu $k \times n$ (k-řádků, n-sloupců). Součin v (2.2) přitom chápeme jako maticový součin matice $\mathbf{A}$ se sloupcovým vektorem $\boldsymbol{x}$. Matici $\mathbf{A}$ budeme nazývat *maticí lineárního zobrazení* F.

2 Cvičení

Úloha: Nalezněte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}\right).$$

Řešení: Výraz v argumentu logaritmu musí být kladný, a proto

$$0 < \frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2} = \frac{(x+1)^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2 - 1}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + y^2 - 1 &> 0 \quad \text{a} \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 &> 0; \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + y^2 - 1 &< 0 \quad \text{a} \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 &< 0. \end{aligned}$$

První alternativa reprezentuje množinu K, která je vnějškem sjednocení dvou kruhů se středy v bodech $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ a poloměry 1. Druhá alternativa popisuje prázdnou množinu. Definiční obor je proto množina K.

Úloha: Ve výrobním procesu jsou náklady rozděleny na částku L určenou na mzdy a částku K určenou na ostatní výdaje (investice, suroviny, apod.). Ekonomové odvodili, že v některých případech je celková výroba $F(L, K)$ při daném rozložení nákladů dána tzv. Cobb-Douglasovou funkcí produkce

$$F(L, K) = cL^a K^{1-a},$$

kde c, a, $0 < a < 1$ jsou konstanty dané konkrétními podmínkami. Ukažte, že zvětší-li se k-krát obě složky nákladů, zvětší se k-krát i celková produkce. Jak se změní produkce klesnou-li mzdy na polovinu a zdvojnásobí-li se ostatní náklady?

Řešení: Platí

$$F(kK, kL) = ck^a L^a k^{1-a} K^{1-a} = kcL^a K^{1-a} = kF(L, K).$$

Analogicky,

$$F\Big(\frac{L}{2}, 2K\Big) = c\frac{L^a}{2^a} 2^{1-a} K^{1-a} = c\, 2^{1-2a} F(L, K).$$

Produkce bude 2^{1-2a} násobek produkce původní.

Úloha: Teplota $T(x, y)$ v bodě (x, y) roviny je dána vztahem

$$T(x, y) = 20 + x^2 + 4y^2.$$

Určete v jakém rozmezí se teplota pohybuje a stanovte izotermy.

Řešení: Jistě platí $T(x, y) \geq 20$. Výraz $x^2 + 4y^2$ může nabýt libovolné nezáporné hodnoty. Obor hodnot funkce T je tudíž interval $\langle 20, \infty)$.

Zvolme $c > 20$. Izoterma je pak křivka o rovnici

$$20 + x^2 + 4y^2 = c.$$

Po úpravě

$$\frac{x^2}{c - 20} + \frac{y^2}{\frac{c-20}{4}} = 1.$$

Analytická geometrie říká, že tato rovnice reprezentuje elipsu se středem v počátku a poloosami $\sqrt{c - 20}$, $\frac{\sqrt{c-20}}{2}$. Soustava izoterm je tedy soustavou elips se středy v počátku, jejichž x-ová poloosa je dvakrát větší než $y-$nová. Výjimkou je případ $c = 20$, kterému odpovídá jednobodová izoterma $\{(0, 0)\}$.

Úloha: Nalezněte definiční obor, konstantní hladiny a obor hodnot funkce čtyř proměnných

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1}.$$

Řešení: Funkci f můžeme vyjádřit přehledněji ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1}.$$

Je zřejmé, že $D(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\boldsymbol{x}\| \neq 1\}$. Protože norma $\|\boldsymbol{x}\|$ nabývá libovolné nezáporné hodnoty, je díky označení $t = \|\boldsymbol{x}\|$ obor hodnot funkce f stejný jako obor hodnot pomocné funkce

$$g(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$$

definované na intervalu $\langle 0,1) \cup (1,\infty)$. Funkce g je na intervalu $\langle 0,1)$ klesající s limitami v krajních bodech $g(0) = -1$, $\lim_{t\to 1-} g(t) = -\infty$. Na intervalu $(1,\infty)$ je také klesající s limitami v krajních bodech $\lim_{t\to 1+} g(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. Závěrem tedy můžeme konstatovat, že obor hodnot funkce f je množina $(-\infty,-1\rangle \cup (0,\infty)$.

Konstantní hladina odpovídající hodnotě $c \notin (-1,0)$ je dána rovnicí

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1} = c.$$

Po úpravě

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\frac{1}{c} + 1}.$$

Každá konstantní hladina je hranice čtyřrozměrné koule se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1 + 1/c}$.

Úloha: Předpokládejme, že vrstevnice funkce $f(x,y)$ jsou soustředné kružnice, jejichž poloměr se pohybuje v intervalu $(0,r)$, $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vrstevnice odpovídající hodnotě $f(0,0)$ je $\{(0,0)\}$. Ukažte, že graf funkce f je rotační plocha, která vznikne rotací grafu jisté funkce jedné proměnné kolem osy z. Ukažte dále, že funkce s touto vlastností jsou právě funkce tvaru

$$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2}),$$

kde g je definována na intervalu $\langle 0,r)$, $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Řešení: Jsou-li vrstevnice výše popsané soustředné kružnice pak graf funkce $f(x,y)$ se nezmění při rotaci kolem osy z. Skutečně se tedy jedná o rotační plochu, kterou získáme rotací *libovolného* řezu grafu funkce rovinou, která je kolmá na rovinu xy a prochází počátkem. Například je možno volit rovinu o rovnici $y = 0$ (souřadnicová rovina xz) a popsat tak graf funkce jako výsledek rotace grafu pomocné funkce $h(x) = f(x,0)$ nakresleného v rovině xz.

Druhá část úlohy je jednoduchá. Soustředné kružnice se středem v počátku mají za vrstevnice právě ty funkce, jejichž hodnota závisí výhradně na vzdálenosti od počátku – tedy na výrazu $\sqrt{x^2+y^2}$. Proto můžeme takovéto funkce jednodušeji reprezentovat ve tvaru $g(\sqrt{x^2+y^2})$, kde g je definována na jistém intervalu $\langle 0,r)$, $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

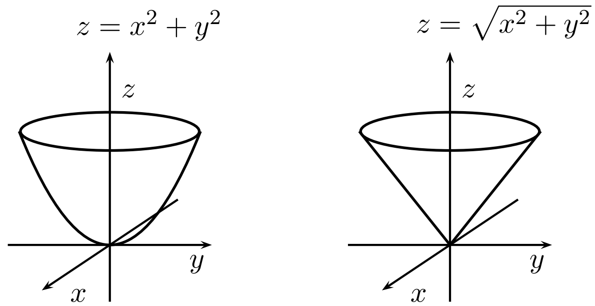
Úloha: Popište grafy následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(iii) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2-2x-4y-4}$.

Řešení: (i) Zadání funkce bezprostředně odpovídá předchozí úloze. Její graf je proto útvar, který vznikne rotací paraboly $z = f(x,0) = x^2$ ležící v rovině xz kolem osy z. Výsledkem je povrch rotačního paraboloidu znázorněný na obr. 2.6(a).



(a) (b)

Obr. 2.6

(ii) Zde graf vznikl rotací funkce $z = f(x,0) = |x|$. Výsledná plocha je kuželová a je na obr.2.6(b)

(iii) Podívejme se, jak vypadají vrstevnice funkce $f(x,y)$. Pro body (x,y) ležící na vrstevnici odpovídající hodnotě $c > 0$ máme rovnici

$$e^{-x^2-y^2-2x-4y-4} = c. \tag{2.3}$$

Čtenář obeznámený s analytickou geometrií v rovině již asi vidí, že se musí jednat o kružnice. Skutečně, po doplnění na mocniny dvojčlenů a úpravě získáme exponent ve tvaru

$$-x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = -(x+1)^2 - (y+2)^2 + 1.$$

Vrátíme-li se k rovnici (2.3) máme

$$e^{-(x+1)^2-(y+2)^2+1} = c,$$

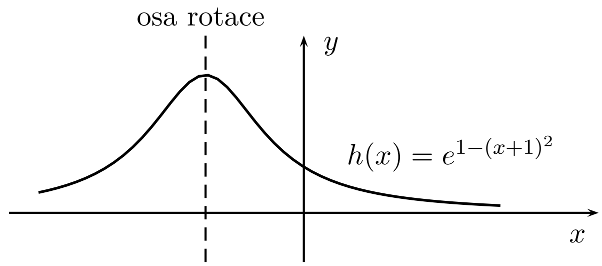
a po úpravách

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = -\ln\left(\frac{c}{e}\right).$$

Bude-li $c > e$ je výraz na pravé straně v předchozí rovnici záporný, což znamená, že rovnice řešení nemá. Na druhé straně, je-li $0 < c \le e$ popisuje získaná rovnice systém soustředných kružnic se středem v bodě $(-1,-2)$ a poloměrem $\sqrt{-\ln(c/e)}$. V případě $c = e$ kružnice degeneruje na bod $(-1,-2)$. Oborem hodnot funkce f jsou tedy přípustné hodnoty c, tj. interval $(0, e\rangle$. Podobně jako v předchozí úloze vidíme, že graf vznikne rotací jisté křivky, tentokrát kolem osy rovnoběžné s osou z a procházející bodem $(-1,-2)$. Tuto křivku nalezneme jako průnik libovolné roviny kolmé na podstavu xy a procházející bodem $(-1,-2)$. Volba roviny o rovnici $y = -2$ dá

$$z = f(x,-2) = e^{-(x+1)^2+1} = ee^{-(x+1)^2} = h(x).$$

Graf funkce h je znázorněn na obrázku 2.7.



Obr. 2.7

Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce h kolem příslušné osy. Získáme tak útvar připomínající sopku Vesuv s vrcholem $(-1, -2, e)$.

Úloha: Nadmořská výška terénu v bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je dána funkcí

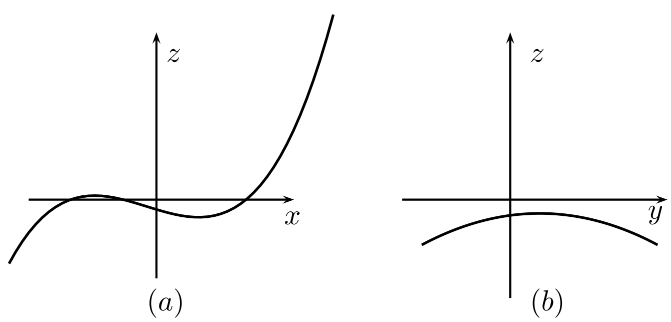
$$f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 - 9x + 2y - 10.$$

Určete reliéf terénu, jestliže se vydáme z bodu $(0, 0)$ ve směru (i) přímky s rovnicí $y = 2$, (ii) přímky s rovnicí $x = 2$.

Řešení: (i)

$$f(x, 2) = x^3 + x^2 - 9x - 10.$$

Dostáváme tak funkci jedné proměnné (polynom třetího stupně), jejíž graf je znázorněn na obr. 2.8(a) a představuje hledaný výškový profil.



Obr. 2.8

(ii) Analogicky jako výše

$$f(2, y) = -y^2 + 2y - 16.$$

Reliéfem terénu je tentokrát parabola nakreslená na obr. 2.8(b). Řezy grafem funkce f v různých směrech jsou tedy dány funkcemi odlišných typů. Povšimněme si také skutečnosti, že řezy grafem funkce f odpovídajícími v půdoryse pravoúhlé síti $x = c, y = c$ jsou pouze posunutím grafů na obr. 2.8(a) a (b) a to ve vertikálním směru. Na graf funkce f se tedy z jedné strany můžeme dívat jako na sjednocení navzájem posunutých křivek třetího stupně a z druhé strany jako na sjednocení navzájem posunutých parabol. (Tento typ grafu je rovněž na obrázku 7.4).

Určete definiční obory následujících funkcí

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$;
2. $f(x,y) = \sqrt{\sin x \cos y}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{25-x^2-y^2}$;
4. $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$;
5. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$;
6. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{-x^2-y^2+2x}}$;
7. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{|y+z|}$;
8. $f(x,y) = \ln(x \sin y)$;
9. $f(x,y) = \arcsin(x+y)$;
10. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 36)$.

11. Ukažte, že $F(tx,ty) = t^3 F(x,y)$, kde $F(x,y) = 3x^2y - \sqrt{x^6 - y^6}$.
12. Nalezněte funkci $f(x)$, je-li (i) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}$, $x > 0, y \neq 0$ a (ii) $f\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $y \neq 0$.
13. Nalezněte konstantní hladiny funkce
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad a > 0.$$
14. Pro n grammolekul ideálního plynu platí, že tlak p je roven $p = \dfrac{nRT}{V}$, kde R je konstanta, T je teplota a V je objem. Popište izobary.
15. Dle Poiseuilleho zákona z fyziologie je odpor R krevní cévy délky l a poloměru r dán vztahem $R = \dfrac{\alpha l}{r^4}$, $\alpha > 0$. Při jakých hodnotách l a r zůstává tento odpor konstantní?
16. V závislosti na parametru α stanovte typ konstantní hladiny funkce $f(x,y) = e^{\alpha x^2+y^2-2y+1}$.

17. Ukažte, že každá funkce dvou proměnných, jejíž konstantní hladiny jsou systémem hyperbol $y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$ je tvaru $f(x, y) = g(xy)$.

Načrtněte grafy následujících funkcí:

18. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$;
19. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
20. $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$;
21. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;
22. $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad a, b > 0$;
23. $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$;
24. $f(x, y) = x^2$;
25. $f(x, y) = |x - y + 1|$;
26. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$;
27. $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$;
28. Určete funkci dvou proměnných, jejíž graf vznikne rotací funkce $z = \sqrt{x}$ kolem osy z.
29. Pohybujeme se na ploše, která je grafem funkce $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 15$. Výchozí poloha je bod $(1, 1, 13)$. Určete směr největšího a nejmenšího stoupání. Návod: porovnejte mezi sebou derivace funkcí, které vzniknou příslušnými řezy grafu funkce f.
30. Vyšetřete, jak typ hladiny konstantnosti lineárního zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ závisí na hodnosti $h(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$, která reprezentuje lineární zobrazení F.

Výsledky.

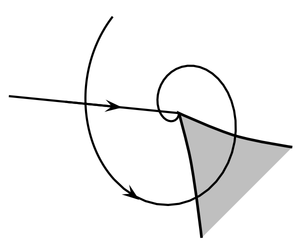
1. $\langle -1, 1\rangle^2$; **2.** $\bigcup_{k,l,r,s\in Z} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle \times \langle 2l\pi - \frac{\pi}{2}, 2l\pi + \frac{\pi}{2}\rangle \cup \langle -\pi + 2r\pi, 2r\pi\rangle \times \langle \frac{\pi}{2} + 2s\pi, \frac{3}{2}\pi + 2s\pi\rangle$; **3.** $x^2 + y^2 \neq 25$ — vše mimo kružnici; **4.** uzavřený kruh $x^2 + y^2 \leq 9$; **5.** otevřená koule $x^2 + y^2 + z^2 < 4$; **6.** otevřený kruh se středem v bodě (1,0) a poloměrem 1 bez otevřeného kruhu se středem v bodě (1/2, 0) a poloměrem 1/2; **7.** $\mathbb{R}^3$ bez roviny $y + z = 0$; **8.** $x > 0,\ 2k\pi < y < (2k+1)\pi,\ x < 0\ (2k+1)\pi < y < (2k+2)\pi$; **9.** pás $-1 - x \leq y \leq 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$; **10.** vnějšek koule — $\|\boldsymbol{x}\| > 6$; **12.** (i) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$, (ii) $f(x) = x/(1 + x^2)$; **13.** kružnice se středy na ose x a přímka $x = 0$; **14.** přímky procházející počátkem; **15.** parabola čtvrtého stupně; **16.** $\alpha = 1$ — kružnice se středy na ose y, $\alpha > 0$ — elipsy, $\alpha < 0$ — hyperboly, $\alpha = 0$ — přímky rovnoběžné s osou x; **18.** eliptický paraboloid; **19.** kuželová plocha; **20.** rotační plocha s osou rotace z vzniklá rotací hyperboly $z = \sqrt{4 + y^2}$ — jednodílný rotační hyperboloid; **21.** rotační plocha vzniklá rotací části hyperboly $z = \sqrt{y^2 - 1},\ z \geq 0$ kolem osy z; **22.** horní část elipsoidu se středem v počátku a poloosami a, b, c; **23.** horní část válce s osou x a poloměrem 1; **24.** parabolická plocha — všechna posunuti paraboly $z = x^2$ rovnoběžně s osou y; **25.** části dvou rovin; **26.** rotace grafu funkce $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ kolem osy $x = -1, y = 1$; **27.** sjednocení křivek $z = \frac{2c}{x^2+c^2}$ ležící v rovinách $y = c$, $c \in (-\infty, \infty)$; **28.** $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$; **29.** $(-1, -6)$ — největší stoupání, $(1, 6)$ — největší klesání; **30.** Je-li $h(\boldsymbol{A}) = 3$, hladiny konstantnosti jsou body; pro $h(\boldsymbol{A}) = 2$ to jsou přímky; pro $h(\boldsymbol{A}) = 1$ roviny a pro $h(\boldsymbol{A}) = 0$ je hladina konstantnosti $\mathbb{R}^3$.

Kapitola 3

Limita a spojitost funkcí více proměnných

1 Limita funkcí

Limita popisuje chování hodnot vyšetřované funkce, blížíme-li se k danému bodu. V případě funkce definované na reálné ose se k danému bodu můžeme přibližovat zprava, zleva nebo současně z obou stran. Tomu v jedné proměnné odpovídají pojmy limita zleva, limita zprava a limita oboustranná. Již v případě funkce dvou proměnných, tedy funkce definované v rovině, máme mnohem více možností, jak se k danému bodu blížit, viz obr. 3.1.



Obr. 3.1

Do libovolné blízkosti bodu v rovině se můžeme dostat po polopřímkách, spirálách, kruhových výsečích, apod. Abychom postihli všechny tyto možnosti v jedné univerzální definici, budeme definovat pojem limity vzhledem k množině. V ostatním je definice vícerozměrné limity zcela stejná jako v případě funkce jedné proměnné.

Definice 3.1. *Nechť f je funkce definovaná na podmnožině N euklidovského prostoru. Předpokládejme, že bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodem množiny N. Řekneme, že* **funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ limitu** $b \in \mathbb{R}$ *(vzhledem k množině N), píšeme*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in N}} f(\boldsymbol{x}) = b,$$

jestliže pro každé okolí $U(b)$ bodu b existuje prstencové okolí $P(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$, že

$$f\big(P(\boldsymbol{a}) \cap N\big) \subset U(b).$$

Vyjádřeno pomocí nerovností to znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí následující implikace

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta,\ \boldsymbol{x} \in N \implies |f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon.$$

Požadavek, že $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množiny N je nutný k tomu, abychom dali hodnotě limity vůbec nějaký smysl. Pokud by $\boldsymbol{a}$ nebyl hromadným bodem množiny N, pak předpoklad v implikaci nebude pro malá δ splněn a implikace bude automaticky platit pro jakékoli b.

Použijeme-li zápis $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ bez specifikování množiny N, budeme tím rozumět limitu funkce vzhledem k jejímu definičnímu oboru. Funkce f nemusí být v limitním bodě $\boldsymbol{a}$ definována, tento bod však musí být hromadným bodem jejího definičního oboru.

Příklad 3.2. Budeme se zabývat limitou funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Protože $D(f)$ je celý prostor $\mathbb{R}^n$, není třeba uvádět, vzhledem k jaké množině limitu počítáme. Z geometrického názoru je zřejmé, že tato limita je rovna normě $\|\boldsymbol{a}\|$. Ověříme si tuto hypotézu přímo z Definice 3.1. K tomu je zapotřebí ukázat, že k libovolně zvolenému okolí U bodu $\|\boldsymbol{a}\|$ (řekněme o poloměru ε) existuje prstencové okolí P bodu $\boldsymbol{a}$ (řekněme o poloměru δ) tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in P$ je $f(\boldsymbol{x}) \in U$. Zapsáno pomocí nerovností

$$0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{a}\|\big| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti (viz cvičení 3, Kap. 1) máme

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{a}\|\big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|.$$

Implikace v (3.1) bude splněna např. při volbě $\delta = \varepsilon$. Závěrem tak vidíme, že

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{a}\|$$

pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

Zcela stejně jako v případě funkce jedné proměnné je možno ukázat, že funkce má nejvýše jednu limitu. Další důležité pozorování je následující. Předpokládejme, že

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in N}} f(\boldsymbol{x}) = b$$

a že máme dánu ještě nějakou podmnožinu $M \subset N$. Je-li bod $\boldsymbol{a}$ rovněž hromadným bodem množiny M, pak se nutně musíme dostat ke stejné hodnotě b, budeme-li se k bodu $\boldsymbol{a}$ blížit pouze pomocí bodů množiny M. Má-li tedy například funkce f limitu v daném bodě, pak musí mít stejnou limitu vzhledem ke všem podmnožinám svého definičního oboru. Tuto skutečnost často používáme při vyšetřování existence limity a stanovení její možné hodnoty.

Příklad 3.3. (i) Zabývejme se limitou funkce

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \text{ v bodě } (0,0).$$

Uvažujme nejdříve limity vzhledem k přímce $y=kx$. Podívejme se na hodnoty funkce f na přímce $y=kx$:

$$f(x,kx)=\frac{x^2k^2x^2}{x^4+k^4x^4}=\frac{k^2}{1+k^4}.$$

Funkce f je na této přímce konstantní. Její limita vzhledem k přímce $y=kx$ je

$$\frac{k^2}{1+k^4}.$$

Pro různé hodnoty k tyto limity vycházejí různě, a proto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nemůže existovat.

(ii) Vyšetřujme existenci limity funkce

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ v bodě } (0,0).$$

Stejně jako dříve budeme zkoumat limity vůči přímkám $y=kx$. Pro $k\neq 0$ dostaneme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3k}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0.$$

Protože f má hodnotu nula na souřadnicových osách, můžeme konstatovat, že f má nulovou limitu na všech přímkách procházejících počátkem. To nás ovšem ještě neopravňuje tvrdit, že f má nulovou dvojrozměrnou limitu v tomto bodě. Uvažujeme-li totiž limity pouze po přímkách klesá x i y k nule lineárně, tedy rychlostí „stejného řádu“. Bude-li však konvergence x-ových a y-nových souřadnic rozdílná, může se chování výrazu

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

v blízkosti nuly výrazně změnit. Uvažujme například parabolu $y=x^2$. Pohybem po této křivce klesá x s mocninou první zatímco y s mocninou druhou. Pro limitu vůči parabole máme

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

Tato limita se ovšem liší od limit po přímkách, a proto f nemá limitu v $(0,0)$.

Tento příklad ilustruje jev, se kterým se ještě setkáme vícekrát a který nemá analogii v jednorozměrném případě. Asymptotické chování funkce vůči přímkám ještě nezaručuje stejné asymptotické vícerozměrné chování funkce.

Při výpočtu vícerozměrných limit často používáme pravidla shrnutá v následující větě. Jejich důkazy jsou naprosto stejné jako v případě funkce jedné proměnné, a proto je nebudeme uvádět.

Věta 3.4. *Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = c$. *Pak platí následující tvrzení:*

(i) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = b + c.$

(ii) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = bc.$

(iii) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{b}{c}$, *za předpokladu, že* $c \neq 0$.

(iv) *Nechť existuje* $\lim_{t\to b} h(t)$ *a nechť existuje prstencové okolí* $P(\boldsymbol{a})$ *bodu* $\boldsymbol{a}$, *že* $f(\boldsymbol{x}) \neq b$ *pro* $\boldsymbol{x} \in P$. *Pak*
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(f(\boldsymbol{x})) = \lim_{t\to b} h(t).$$

(v) *Je-li* $f \leq g$ *na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$, *pak* $b \leq c$.

(vi) *Je-li* f *omezená na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$ *a současně* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0$, *pak i* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = 0$.

(vii) *Platí-li pro funkci* h *na jistém prstencovém okolí bodu* $\boldsymbol{a}$ *nerovnost* $f \leq h \leq g$ *a je-li přitom* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$, *pak* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$.

Příklad 3.5. (i) Stanovme limitu funkce $f(x, y, z) = x^2yz$ v bodě $(2, 2, 1)$. Podle bodu (ii) Věty 3.4 je výpočet jednoduchý
$$\lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} x^2yz = \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} x^2 \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} y \lim_{(x,y,z)\to(2,2,1)} z = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$
(ii) Stanovme limitu
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$
Můžeme využít skutečnosti, že $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2 + y^2 + z^2 = 0$ a provést substituci $t = x^2 + y^2 + z^2$. Aplikací pravidla (iv) Věty 3.4, kde položíme $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, dostaneme
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$
(iii) Určeme limitu
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x - y + z}.$$
Na základě odhadu
$$\left|\sin \frac{1}{x - y + z}\right| \leq 1$$
a skutečnosti, že $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |x| = 0$, máme podle Věty 3.4 (vi), že
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x \sin \frac{1}{x - y + z} = 0.$$

Pro výpočet vícerozměrných limit neexistuje analogie „mechanického“ l’Hospitalova pravidla, které máme k dispozici pro reálné funkce. Příklady jsou proto více výzvou pro naši intuici. Při jejich řešení musíme často kombinovat pravidla Věty 3.4 s vyšetřováním limit vůči podmnožinám. Zjistíme-li například limitu funkce vůči některé přímce, pak celková limita je jí buďto rovna anebo vůbec neexistuje.

2 Spojitost funkcí

Intuitivní představa spojitosti zobrazení je vlastnost, že body ležící blízko sebe se zobrazí opět na body s malou vzdáleností. Tuto představu lze matematicky precizovat pomocí pojmu limity zcela stejně jako v případě teorie funkcí jedné proměnné.

Definice 3.6. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce daná na množině M euklidovského prostoru. Řekneme, že funkce f je* **spojitá v bodě** $\boldsymbol{x}_0 \in M$*, je-li $\boldsymbol{x}_0$ buďto izolovaný bod množiny M nebo platí, že*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá***, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Protože každý bod množiny M je buď izolovaný bod množiny M nebo hromadný bod množiny M, máme pojem spojitosti definovaný pro *všechny* body z M.

Přepíšeme-li definici spojitosti pomocí okolí, dostaneme následující ekvivalentní vyjádření: f je spojitá v $\boldsymbol{x}_0$, jestliže pro každé okolí $U(f(\boldsymbol{x}_0))$ bodu $f(\boldsymbol{x}_0)$ existuje okolí $V(\boldsymbol{x}_0)$ bodu $\boldsymbol{x}_0$, že

$$f(V(\boldsymbol{x}_0)) \subset U(f(\boldsymbol{x}_0)).$$

Je dobré si uvědomit, že i když jsme definovali spojitost pro funkce, máme ji ve skutečnosti zavedenu i pro zobrazení $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mezi euklidovskými prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$. Podle poznámky na konci předešlé kapitoly, vztah (2.1), je $F = (F_1, \ldots, F_k)$ pro nějakou k-tici funkcí $F_1, \ldots, F_k$. Spojitost F znamená spojitost všech složek.

Důležitá vlastnost spojitých funkcí je, že zachovávají konvergenci.

Věta 3.7. *Nechť $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce na euklidovském protstoru X a $\boldsymbol{x} \in X$. Následující je ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá v $\boldsymbol{x}$.*

(ii) *Je-li $(\boldsymbol{x}_n)$ posloupnost, že $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$, pak $\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x})$.*

Důkaz. Začneme s implikací (i) ⇒ (ii). Víme, že f je spojitá v $\boldsymbol{x}$ a máme posloupnost $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. Zvolme si libovolné okolí $U(f(\boldsymbol{x}))$. Existuje okolí $V(\boldsymbol{x})$, že $f(V)\boldsymbol{x})) \subset U(f(\boldsymbol{x}))$. Protože $\boldsymbol{x}_n$ konvergují k $\boldsymbol{x}$, bude od jistého indexu n_0 platit $\boldsymbol{x}_n \in V(\boldsymbol{x})$, $n \geq n_0$. To ale znamená, že $f(\boldsymbol{x}_n) \in U(f(\boldsymbol{x}))$ pro $n \geq n_0$.

(ii) ⇒ (i). Předpokládáme, že platí (ii). Kdyby f nebyla spojitá v $\boldsymbol{x}$, pak existuje jisté okolí $U(f(\boldsymbol{x}))$, že v každém okolí $V(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$ nalezneme nějaký prvek $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ s vlastností $f(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \notin U(f(\boldsymbol{x}))$. Volme si nyní okolí $V_{1/n}(\boldsymbol{x})$ s poloměry $1/n$. V každém z nich existuje bod $\boldsymbol{x}_n \in V_{1/n}(\boldsymbol{x})$, že $f(\boldsymbol{x}_n) \notin U(f(\boldsymbol{x}))$. Protože poloměry okolí $V_{1/n}(\boldsymbol{x})$ jdou k nule, musí platit $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. Ale hodnoty $f(\boldsymbol{x}_n)$ leží všechny mimo okolí $U(f(\boldsymbol{x}))$, čímž je porušena vlastnost (ii). □

Z Věty 3.4 o limitách funkcí ihned vyplývá, které matematické operace zachovávají spojitost funkcí.

Věta 3.8. *Nechť f a g jsou spojité funkce. Pak $f+g$, fg a $\dfrac{f}{g}$ (při $g \neq 0$) jsou opět spojité. Je-li h spojitá funkce jedné proměnné, pak složená funkce $h(f)$ je spojitá.*

Věta 3.8 říká, že jakoukoli manipulací se spojitými funkcemi, která zahrnuje konečně mnoho aritmetických operací a vytváření složených funkcí, dostaneme opět spojitou funkci. Z těchto důvodů je například funkce

$$f(x,y,z) = \frac{\operatorname{argsinh}(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\operatorname{tg}(xyz)} + \cos(xy)$$

spojitá ve svém definičním oboru.

Příklad 3.9. (i) Funkce $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ je spojitá v celém euklidovském prostoru. Tato skutečnost je důsledkem Příkladu 3.2. Jiné zdůvodnění plyne také z Věty 3.8.

(ii) Každá lineární funkce je spojitá. Taková funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je vždy tvaru

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Bezprostředně z Věty 3.8 vidíme, že funkce f je spojitá.

V následujícím příkladě uvedeme ukázky nespojitých funkcí.

Příklad 3.10. (i) Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

je nespojitá ve všech bodech ležících na ose y. Důvodem je neexistence limity v žádném bodě na ose y. Graf po částech konstantní funkce f má zlom podél osy y.

(ii) Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

nemá dle Příkladu 3.3 (i) limitu v bodě $(0,0)$. Proto nemůže být v tomto bodě spojitá, ačkoliv je například spojitá vůči každé přímce procházející počátkem.

Nakonec si uvedeme jedno ekvivalentní vyjádření spojitosti, které užívá otevřených množin. Bude se nám hodit v další kapitole, neboť usnadňuje jisté typy argumentace týkající se spojitosti. I zde je na místě poznamenat, že i když větu formulujeme pro funkce, platí i pro zobrazení mezi euklidovskými prostory.

Věta 3.11. *Mějme funkci $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ na euklidovském prostoru X. Pak f je spojitá právě, když pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ je vzor $f^{-1}(G)$ otevřená množina v X.*

Důkaz. Věta je ve tvaru ekvivalence, musíme proto dokázat dvě implikace.

Předpokládejme, že f je spojitá funkce a $G \subset \mathbb{R}$ otevřená. Nechť $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(G)$ je libovolný bod. Pak $f(\boldsymbol{x}) \in G$ a jelikož G je otevřená, je $f(\boldsymbol{x})$ jejím vntřním bodem. Chceme nyní ověřit, že $\boldsymbol{x}$ musí být vnitřním bodem množiny $f^{-1}(G)$. Kdyby nebyl, pak nutně leží na hranici $\partial(f^{-1}(G))$. V tom případě existují body $\boldsymbol{x}_n \notin f^{-1}(G)$ konvergující k bodu $\boldsymbol{x}$,

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x},$$

a obrazy těchto bodů leží mimo G, $f(\boldsymbol{x}_n) \notin G$. Podle Věty 3.7, ze spojitosti f plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}).$$

Protože $f(\boldsymbol{x})$ je vnitřní bod G, nemůže být $f(\boldsymbol{x})$ limitou posloupnosti $f(\boldsymbol{x}_n)$, jejíž členy jsou mimo množinu G.

Obráceně, předpokládejme, že vzory otevřených množin při funkci f jsou otevřené množiny a mějme $\boldsymbol{x} \in X$ libovolný. Dokážeme, že f je spojitá v $\boldsymbol{x}$.

Mějme okolí $U(f(\boldsymbol{x}))$ bodu $f(\boldsymbol{x})$. Jeho vzor $f^{-1}\big(U(f(\boldsymbol{x}))\big)$ je podle předpokladu otevřená množina H obsahující $\boldsymbol{x}$. Můžeme tak najít okolí $V(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x}$, že $V(\boldsymbol{x}) \subset H$. Potom všechny body $\boldsymbol{y} \in V(\boldsymbol{x})$ splňují, že $f(\boldsymbol{y}) \in U(f(\boldsymbol{x}))$ a spojitost je ověřena. □

3 Cvičení

Úloha: Ověřte přímo z definice limity, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy} = 1.$$

Řešení: Naším cílem je k danému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že pro body $\boldsymbol{x} = (x, y)$ s normou $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$ platí $|e^{xy} - 1| < \varepsilon$. Rozepišmne si obě nerovnosti detailněji. Ta první dává $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ a druhá

$$1 - \varepsilon < e^{xy} < 1 + \varepsilon.$$

Můžeme předpokládat, že $0 < \varepsilon < 1$. Logaritmováním nerovnosti $1 - \varepsilon < e^{xy} < 1 + \varepsilon$ dostaneme

$$\ln(1 - \varepsilon) < xy < \ln(1 + \varepsilon).$$

Dolní mez $\ln(1 - \varepsilon)$ je záporná a horní mez $\ln(1 + \varepsilon)$ kladná. K danému ε teď musíme volbou δ zaručit, že součin xy leží v intervalu $(\ln(1 - \varepsilon), \ln(1 + \varepsilon))$. Jak souvisí velikost součinu xy s normou $\sqrt{x^2 + y^2}$? Je snadné ověřit, že

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) < xy < \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

tj.

$$-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2 < xy < \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Můžeme tak položit $\delta = \min\{\sqrt{\ln(1 + \varepsilon)}, \sqrt{-\ln(1 - \varepsilon)}\}$. Tato volba při $\sqrt{x^2 + y^2} \le \delta$ implikuje

$$\ln(1 - \varepsilon) = -(-\ln(1 - \varepsilon)) \le -\delta^2 < -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le xy \le$$
$$\le \frac{1}{2}(x^2 + y^2) < \delta^2 \le \ln(1 + \varepsilon).$$

Úloha: Stanovte limitu (existuje-li) v bodě $(0, 0)$ pro funkci

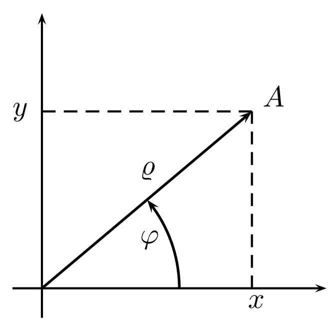
$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Řešení: Bod $(0,0)$ je hromadným bodem definičního oboru, a proto má tato úloha smysl. Zkoumání zadané limity vede na vyšetřování neurčitého výrazu „$\frac{0}{0}$“, a tedy na srovnání velikostí funkce v čitateli a jmenovateli pro malé hodnoty argumentů. Protože xy je polynom druhého stupně ve dvou proměnných, zatímco $\sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$, tušíme, že limita bude nulová. Důvodem pro naši hypotézu je, že čitatel klesá k nule rychleji než jmenovatel. Přesné matematické zdůvodnění je následující:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y||x|}{|x|} = |y|.$$

Fakt, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, implikuje podle Věty 3.4 (vi), že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Jiný způsob řešení příkladů tohoto typu je založen na použití polárních souřadnic. Polární souřadnice popisují bod (x,y) v rovině pomocí dvojice (ϱ,φ), kde $\varrho \in (0,\infty)$ je vzdálenost od počátku, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel, který svírá průvodič daného bodu s osou x, viz. obr 3.2.



Obr. 3.2

Platí tedy

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi \\ y &= \varrho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Transformací funkce do polárních souřadnic máme

$$f(x,y) = \frac{\varrho\cos\varphi\varrho\sin\varphi}{\varrho} = \varrho\cos\varphi\sin\varphi.$$

Nyní

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0+} \varrho\cos\varphi\sin\varphi.$$

Protože $|\cos\varphi\sin\varphi| \leq 1$ nezávisle na úhlu φ a $\varrho \to 0$, máme opět podle Věty 3.4 (vi), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Úloha: Nalezněte limitu (existuje-li)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}.$$

Řešení: Využijeme polárních souřadnic. Funkce má v těchto souřadnicích tvar

$$e^{-\frac{\varrho\cos\varphi}{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}} = e^{-\frac{\cos\varphi}{\varrho^2}}.$$

Vidíme, že tento výraz závisí na úhlu φ: Je-li např. $\varphi = 0$, je $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} e^{-\frac{1}{\varrho^2}} = 0$. Pro $\varphi = \pi/2$ ale dostáváme $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} e^{-\frac{0}{\varrho^2}} = 1$. Závěr je, že zadaná funkce nemá v bodě $(0,0)$ limitu.

Úloha: Stanovte limitu (existuje-li) funkce

$$f(x,y,z) = \frac{2-\sqrt{4-xyz}}{xyz}$$

v bodě $(0,0,0)$.

Řešení: Úlohu je možno jednoduchou substitucí $t = xyz$ převést na případ zkoumání jednorozměrné limity funkce $\dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$ pro $t \to 0$. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočteme:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \frac{1}{4}.$$

Úloha: Vypočtěte

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}.$$

Řešení: Abychom získali jistou představu o vyšetřované funkci, pokusíme se nejdříve porozumět jejímu chování na ose x_1, tj. na množině $\{(x_1,0,0,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Zde platí $f(x_1,0,0,0) = 0$. Uvažovaná limita tedy buďto neexistuje nebo je nulová. Pro druhou možnost svědčí intuitivně fakt, že čitatel zkoumaného zlomku je polynom pátého stupně ve čtyřech proměnných, zatímco jmenovatel je takovýmto polynomem stupně pouze čtyři. Zlomek si rozepíšeme na tři části:

$$\frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} =$$

$$= \frac{2x_1^3x_2^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} - \frac{3x_2^3x_3^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} + \frac{5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}.$$

Pomocí známé nerovnosti $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ použité pro $x = x_1^2$ a $y = x_2^2$ můžeme první sčítanec odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x_1^3x_2^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}\right| &= \frac{|2x_1x_1^2x_2^2|}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}\\ &\leq 2|x_1|\frac{\frac{1}{2}(x_1^4+x_2^4)}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} = |x_1|\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} \leq |x_1|.\end{aligned}$$

Provedením analogických odhadů pro ostatní členy nakonec dostaneme

$$|f(x_1,x_2,x_3,x_3,x_4)| \leq |x_1| + \frac{3}{2}|x_2| + \frac{5}{2}|x_3|.$$

Protože

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} |x_1| + \frac{3}{2}|x_2| + \frac{5}{2}|x_3| = 0,$$

máme podle Věty 3.4 (vi)

$$\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{2x_1^3x_2^2 - 3x_2^3x_3^2 + 5x_3^3x_4^2}{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4} = 0.$$

Úloha: Rozhodněte zda je možno nalézt hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x-y}, & x \neq y;\\ c, & x = y = 0.\end{cases}$$

byla spojitá v bodě $(0,0)$.

Řešení: Funkce f je spojitá v bodě $(0,0)$, je-li její limita v tomto bodě rovna c. Otázka tak vede na zkoumání limity funkce v bodě $(0,0)$. Pokusíme se zjistit, co se děje s hodnotami funkce f, blížíme-li se k hranici jejího definičního oboru, tj. k přímce o rovnici $y = x$. V tomto případě může být výraz $x - y$ libovolně malý a to i při konstantní hodnotě členu $x + y$ v čitateli. Celkově může být hodnota funkce blízko hranice definičního oboru libovolně velká. Formálněji, volme body (x_n, y_n) na přímce o rovnici $x + y = K$, $K > 0$, takové, že jejich složky x_n a y_n navíc splňují

$$x_n - y_n = \frac{1}{n}.$$

Body (x_n, y_n) tak vyhovují těmto dvěma rovnicím

$$x_n + y_n = K \quad \text{a} \quad x_n - y_n = \frac{1}{n} \qquad \text{tj.} \quad x_n = \frac{1}{2}\Big(K + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{2}\Big(K - \frac{1}{n}\Big).$$

Konvergují k bodu $\frac{1}{2}(K,K)$, což pro malé hodnoty K je bod libovolně blízký k počátku. Dosazením do f lze vypočítat, že

$$f(x_n, y_n) = nK^2.$$

Funkce f je proto neomezená na sebemenším okolí počátku. To vylučuje existenci vlastní limity v tomto bodě. Žádnou volbou hodnoty c tedy nelze dosáhnout spojitosti funkce f v bodě $(0,0)$.

Skutečnost, že funkce f nemá limitu v bodě $(0,0)$ je možno ilustrovat také pozorováním, že f má v bodě $(0,0)$ rozdílné limity vůči ose x a vůči parabole $y = x + x^2$. Snadný výpočet přenecháváme čtenáři.

Úloha: Ukažte, že funkce $f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, M)$ (viz cvičení 16, Kap.1) je spojitá.

Řešení: Mějme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a zvolme si libovolné okolí $U_\varepsilon(f(\boldsymbol{x}))$ bodu $f(\boldsymbol{x})$. Chceme nalézt okolí $V_\delta(\boldsymbol{x})$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{y} \in V_\delta(\boldsymbol{x})$ platí $f(\boldsymbol{y}) \in U_\varepsilon(f(\boldsymbol{x}))$, tj.

$$|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon.$$

Hledané okolí bude mít velikost $\delta = \varepsilon/2$. Ověříme, že takto zvolené okolí vyhovuje požadavku. Nechť $\boldsymbol{y} \in V_\delta(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z definice funkce f nalezneme body $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ z množiny M takové, že

$$f(\boldsymbol{x}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\|, \qquad f(\boldsymbol{y}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\|.$$

Nyní počítejme

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{y}) &\leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + f(\boldsymbol{x}) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\boldsymbol{x}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

To znamená, že $f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) < \varepsilon$. Podobně provedeme výpočet pro $f(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &\leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + f(\boldsymbol{y}) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\boldsymbol{y}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

A tedy $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) < \varepsilon$. Spojením obou nerovností máme

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat.

Úloha: Determinant $\det \mathbf{A}$ přiřadí každé čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n číslo $\det \mathbf{A}$. Jestliže reprezentujeme matici $\mathbf{A}$ jako vektorem sestavený z jejích prvků, můžeme funkci „det" chápat jako funkci definovanou na $\mathbb{R}^{n^2}$,

$$\det \colon \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ukažte, že tato funkce je spojitá. Pomocí spojitosti odvoďte, že množina všech regulárních matic je otevřená množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$.

Řešení: Připomeňme, že determinant je možno vyjádřit ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = \sum_{P \in \Pi_n} (-1)^{\operatorname{sgn} P} a_{1P(1)} a_{2P(2)} \cdots a_{nP(n)},$$

kde Π_n je množina všech permutací n-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Funkce $\det \mathbf{A}$ proměnných $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ vznikne konečným součtem a každý sčítanec je konečný součin proměnných. Podle Věty 3.8 je tato funkce spojitá.

Regulární matice jsou matice s nenulovým determinantem. Množina M všech regulárních matic je

$$M = \{\mathbf{A} \mid \det \mathbf{A} \neq 0\} = \det^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

Množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je otevřená a podle Věty 3.11 je i její vzor otevřená množina.

1. Ověřte na základě definice limity, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} x^2 + 3y^2 = 19.$$

Vypočtěte následující limity (existují-li)

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x};$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin(xy^2z^2)}{xyz};$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y};$

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$

6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1 + xy}{1 - xy};$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-1)^2};$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + xy^2}{x^2 + y^2};$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4 + y^4} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}};$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy + 1} - 1}{x + y};$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2};$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$;

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|}$;

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$;

16. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yx^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}$;

17. $\lim\limits_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \dfrac{2x_1x_2x_3x_4}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}$;

18. $\lim_{(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(0,0,0,0)} \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_1-x_2+x_3-x_4}$;

19. Funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ limitu. Čemu je roven průnik $\bigcap_P \overline{f(P)}$ braný přes všechna prstencová okolí P bodu $\boldsymbol{x}_0$?

20. Nalezněte $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0); \\ c, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

byla spojitá.

21. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x \neq y; \\ g(x), & x = y, \end{cases}$$

byla spojitá v $\mathbb{R}^2$.

22. Rozhodněte zda funkce

$$f(x,y,z) = \frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

může být spojitě rozšířena na $\mathbb{R}^3$.

23. Funkce $f(x,y)$ je pro každé pevné x spojitá v proměnné y a pro každé pevné y spojitá v proměnné x. a) Ukažte, že f nemusí být spojitá. b) (Obtížnější) Předpokládejme navíc, že f je monotonní v proměnné x. Ukažte, že pak je f spojitá.

Výsledky.

2. 0; **3.** 0; **4.** 4; **5.** 0; **6.** -3; **7.** $\frac{1}{2}$; **8.** 1; **9.** 0; **10.** neexistuje; **11.** 1; **12.** $\ln 2$; **13.** neexistuje; **14.** 0; **15.** 1; **16.** 0; **17.** 0; **18.** neexistuje; **19.** $\{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})\}$; **20.** $c=0$; **21.** $g(x)=2x$; **22.** nelze – neexistence limity v bodě $(0,0,0)$; **23.** a) viz např. funkci z Příkladu 3.3(ii).

Kapitola 4

Základní vlastnosti spojitých funkcí

V této kapitole se budeme věnovat hlubším vlastnostem spojitých funkcí v euklidovských prostorech, které budeme využívat v dalším výkladu jak v teoretické, tak i v početní poloze. Soustředíme se jednak na spojité funkce definované na uzavřených a omezených množinách a po té na vztah mezi spojitostí funkce a souvislostí jejího definičního oboru. Při odvozování uvidíme, jak úzce souvisí vlastnosti spojitých funkcí se strukturou euklidovských prostorů, kterou jsme se zabývali v Kapitole 1.

1 Spojité funkce na omezených a uzavřených množinách

První princip, který si uvedeme, je princip existence maxima a minima spojité funkce na omezené a uzavřené množině. Tato věta garantuje, že úloha nalézt extrémy spojité funkce více proměnných má řešení. S jejími početními aplikacemi se setkáme v kapitole o extrémech funkcí.

Věta 4.1. *Nechť f je spojitá funkce na uzavřené a omezené množině M v euklidovském prostoru X. Pak existují body $\boldsymbol{x}_{\max}, \boldsymbol{x}_{\min} \in M$ tak, že*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_{\max}) &= \max_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x}) \\ f(\boldsymbol{x}_{\min}) &= \min_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Důkaz. Budeme dokazovat existenci bodu $\boldsymbol{x}_{\max}$, případ minima odtud již snadno vyvodíme. V první fázi ukážeme, že funkce f musí být omezená shora. Tato skutečnost se nejlépe demonstruje důkazem sporem. Předpokládejme, že f může nabýt libovolně velké hodnoty. Pak pro každé přirozené číslo n lze nalézt bod $\boldsymbol{x}_n \in M$ tak, že

$$f(\boldsymbol{x}_n) \geq n.$$

Množina $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ skládající se ze všech takovýchto bodů je nekonečná podmnožina M. Z Věty 1.10 vyplývá existence hromadného bodu $\boldsymbol{x}_h$ množiny A. Díky uzavřenosti množiny M musí být $\boldsymbol{x}_h \in M$: V opačném případě by $\boldsymbol{x}_h$ byl vnějším bodem a existovalo by jeho okolí, ve kterém není žádný bod množiny M. To by bylo ve sporu v vlastností hromadného bodu množiny $A \subset M$.

K logickému rozporu dojdeme, budeme-li zkoumat, jakou hodnotu by vlastně funkce f měla mít v bodě $\boldsymbol{x}_h$. Na jedné straně díky spojitosti máme

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x}\in A}} f(\boldsymbol{x}).$$

Výběr bodů $\boldsymbol{x}_n$ byl ovšem takový, že pro každé n je nejen $f(\boldsymbol{x}_n) \geq n$, ale i $f(\boldsymbol{x}_m) \geq n$ pro všechna $m \geq n$. Odtud nám vyplývá, že

$$f(\boldsymbol{x}_h) \geq n \text{ pro všechna } n.$$

Hodnota $f(\boldsymbol{x}_h)$ je ale reálné číslo, což je spor.

Skutečnost, že f je shora omezená značí, že supremum jejích hodnot na M je konečné. Označme si ho

$$s = \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in M\}.$$

Připomeňme, že supremum je charakterizováno následujícími vlastnostmi

(i) $f(\boldsymbol{x}) \leq s$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$,

(ii) pro každé přirozené číslo m existuje $\boldsymbol{x}_m \in M$ tak, že $s - \dfrac{1}{m} \leq f(\boldsymbol{x}_m) \leq s$.

Užijeme vlastnost (ii) a pro každé m vybereme příslušný bod $\boldsymbol{x}_m$. Množinu všech takto vybraných bodů označíme $B = \{\boldsymbol{x}_m \in M \mid m \in \mathbb{N}\}$. Je-li B konečná, pak jeden z jejích bodů musí být bodem maxima a důkaz je hotov. Je-li B nekonečná, má opět podle Věty 1.10 hromadný bod $\boldsymbol{x}_h \in M$. Spojitost funkce f a vlastnost (ii) teď dává

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x}\in B}} f(\boldsymbol{x}) = s.$$

Tím jsme ukázali, že s je ve skutečnosti maximum, neboť se ho nabývá v bodě $\boldsymbol{x}_h \in M$.

Pro existenci minima použijeme následující úvahu: Zatím máme dokázáno, že *každá* spojitá funkce na M nabývá svého maxima. Specielně i funkce $(-f)$ nabývá svého maxima v jistém bodě $\boldsymbol{x}_0$. Nyní si stačí uvědomit, že

$$\min(f) = -\max(-f)$$

a vidíme, že v $\boldsymbol{x}_0$ nabývá původní funkce f svého minima. □

Důsledkem Věty 4.1 je čtenáři již známý fakt, že každá spojitá funkce jedné proměnné má na omezeném uzavřeném intervalu maximum i minimum. Dalším, tentokráte novým důsledkem je, že spojitá funkce zobrazí uzavřenou omezenou množinu vždycky na uzavřenou omezenou množinu.

Důsledek 4.2. *Nechť $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na uzavřené a omezené podmnožině $M \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru. Pak obor hodnot $f(M)$ je omezená a uzavřená množina.*

Důkaz. Podle Věty 4.1 nabývá f minima a maxima. Obor hodnot je tedy omezená množina v $\mathbb{R}$. Zbývá ukázat, že $f(M)$ je uzavřená množina, tj. že $f(M)$ obsahuje všechny své hraniční body. Mějme hraniční bod y množiny $f(M)$. To znamená, že pro každé n přirozené můžeme nalézt $y_n \in f(M)$, že

$$|y_n - y| \leq \frac{1}{n}.$$

Bod y_n je ale obraz nějakého $\boldsymbol{x}_n \in M$, $y_n = f(\boldsymbol{x}_n)$, takže máme

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - y| \leq \frac{1}{n}. \tag{4.1}$$

Položíme $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Je-li A konečná, pak $y = f(\boldsymbol{x}_n)$ pro nějaké $\boldsymbol{x}_n \in M$, a tedy $y \in f(M)$. Je-li A nekonečná, má podle Věty 1.10 hromadný bod $\boldsymbol{x}_h \in M$. Jaká je hodnota $f(\boldsymbol{x}_h)$? Na základě spojitosti máme

$$f(\boldsymbol{x}_h) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_h \\ \boldsymbol{x} \in A}} f(\boldsymbol{x}).$$

Přidáme-li k tomu nerovnost (4.1), vidíme, že body $f(\boldsymbol{x}_n)$ se rovněž blíží k y. To znamená, že nutně $y = f(\boldsymbol{x}_h)$. Dospěli jsme takto k závěru $y \in f(M)$. Množina $f(M)$ obsahuje všechny své hraniční body, a je proto uzavřená. $\square$

Poslední vlastnost spojitých funkcí na omezených a uzavřených množinách, o které se zmíníme, je stejnoměrná spojitost. Tato vlastnost bude klíčová pro teorii vícerozměrné integrace a čtenář se s aplikacemi tohoto pojmu setká v [1].

Definice 4.3. *Nechť f je funkce definovaná na jisté podmnožině M euklidovského prostoru. Řekneme, že f je* **stejnoměrně spojitá***, jestliže platí následující tvrzení: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon, \text{ kdykoliv } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \delta, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M.$$

Funkce je tedy stejnoměrně spojitá, jestliže pro danou odchylku funkčních hodnot $\varepsilon > 0$ umíme najít takovou vzdálenost $\delta > 0$, že rozdíl funkčních hodnot nepřekročí stanovenou odchylku, pokud budou body od sebe vzdáleny maximálně δ. *Nezáleží přitom vůbec na umístění těchto bodů, ale pouze na jejich vzdálenosti.* Proto uvedený typ spojitosti nazýváme spojitostí stejnoměrnou. Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá. Opačné tvrzení však vždy neplatí. Vezměme si například spojitou funkci v jedné proměnné

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

Pro zadané ε není možno nalézt $\delta > 0$ tak, aby podmínka $|x - y| < \delta$ zaručovala, že

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon \text{ pro všechna } x, y \in (0, 1).$$

Důvod je v tom, že blízko nuly je možno nalézt body x, y s libovolně malou vzdáleností, a přitom s libovolně velkým rozdílem funkčních hodnot. Skutečně, pro přirozená čísla n, m položíme $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m+n}$. Pak

$$|x - y| < \frac{1}{n}, \quad \text{zatímco} \quad |f(x) - f(y)| = m.$$

Ukazuje se však, že pokud se omezíme na uzavřené a omezené množiny, je každá spojitá funkce automaticky stejnoměrně spojitá.

Věta 4.4. *Každá funkce spojitá na uzavřené omezené množině v euklidovském prostoru je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Argument důkazu se opět opírá o stěžejní vlastnost omezených uzavřených množin z Věty 1.10: obsahují s každou nekonečnou podmnožinou i její hromadný bod.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že f je spojitá na omezené uzavřené množině M v euklidovském prostoru, ale není stejnoměrně spojitá. Negací podmínky v Definici 4.3 dostaneme: Existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé přirozené číslo n lze nalézt dvojici bodů $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n \in M$ se vzdáleností

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| \leq \frac{1}{n} \tag{4.2}$$

(tedy libovolně malou) a rozdílem funkčních hodnot

$$|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{4.3}$$

Označíme $A = \{\boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $B = \{\boldsymbol{y}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alespoň jedna z množin je nekonečná. Předpokládejme, že A. Podle Věty 1.10 existuje hromadný bod $\boldsymbol{x}_h$ množiny A. Protože M je uzavřená, leží $\boldsymbol{x}_h$ v množině M. Dále, funkce f je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}_h$, můžeme tak nalézt okolí $V(\boldsymbol{x}_h)$, že všechny body $\boldsymbol{y} \in V(\boldsymbol{x}_h)$ splňují

$$|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}_h)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon_0.$$

V okolí $V(\boldsymbol{x}_h)$ leží nekonečně mnoho bodů z množiny A a díky podmínce (4.2), také nekonečně mnoho dvojic $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n$. Vezměme si jednu takovou dvojici. Pro ní platí

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \leq |f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| &= |f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_h) + f(\boldsymbol{x}_h) - f(\boldsymbol{y}_n)| \\
&\leq |f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x}_h)| + |f(\boldsymbol{x}_h) - f(\boldsymbol{y}_n)| \\
&< \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 = \tfrac{2}{3}\varepsilon_0,
\end{aligned}$$

což je spor. □

2 Spojité funkce na souvislých množinách

Původní představou spojité funkce byla funkce, jejíž graf je možno nakreslit nepřetržitým tahem. Třebaže tato zjednodušující představa později ustoupila, ukazuje na důležitý vztah mezi spojitostí funkce a souvislostí množin. Velice dobře je například známa věta, že každá spojitá funkce jedné proměnné nabývá všech hodnot ležících mezi jakýmikoli jejími dvěma hodnotami. Jinak řečeno, obraz intervalu je vždy interval. Cílem této části je ukázat zobecnění tohoto principu pro spojité funkce na euklidovském prostoru.

Na obrázku 4.1 vidíme čtyři množiny v $\mathbb{R}^2$.

(a) (b) (c) (d)

Obr. 4.1

Množiny na obrázcích (a), (b) považujeme za souvislé, zatímco množiny na obrázcích (c), (d) z názoru k souvislým neřadíme. Jaký je mezi těmito případy rozdíl? Poslední dvě množiny se rozpadají na části, které je navíc možno od sebe oddělit disjunktními otevřenými množinami. Takovýto rozklad se v případě prvních dvou nepodaří nalézt. Tím jsme vedeni k následující definici.

Definice 4.5. *Množina M v euklidovském prostoru X se nazývá* **souvislá**, *jestliže neexistují disjunktní otevřené množiny O_1, O_2 v X takové, že*

(i) $M \subset O_1 \cup O_2$,

(ii) $O_1 \cap M$ *a* $O_2 \cap M$ *jsou neprázdné množiny.*

Otevřená souvislá množina se nazývá **oblast**.

Názornost této definice bude zřetelnější, podíváme-li se na její opak, tj. kdy je množina *nesouvislá*: V takovém případě existují množiny O_1 a O_2 s vlastnostmi (i) a (ii), které nám rozloží množinu M na dvě disjunktní části, $M = (M \cap O_1) \cup (M \cap O_2)$.

Triviální příklady souvislých množin jsou $\emptyset$ a jednobodová množina. V případě otevřených množin se definice souvislosti velmi zjednoduší, jak uvidíme později. Dříve než se budeme zabývat souvislými množinami ve vyšších rozměrech, podíváme se na případ reálné osy. Zde je situace přehledná:

Věta 4.6. *Souvislé množiny v $\mathbb{R}$ jsou právě intervaly, jednobodové množiny a množina prázdná.*

Důkaz. Věta tvrdí v zásadě dvě věci. Za prvé, každý interval je množina souvislá. Za druhé, každá souvislá množina v $\mathbb{R}$, kromě nezajímavého případu množiny jednobodové a prázdné, je interval.

Nejdříve dokážeme první tvrzení. Uvažujme interval $I \subset \mathbb{R}$. Připusťme, že I není souvislý, tj. existují otevřené množiny O_1 a O_2 mající vlastnosti (i) a (ii) z Definice 4.5. Zcela jistě tedy můžeme vybrat prvky $x \in I \cap O_1$ a $y \in I \cap O_2$ a předpokládat, že $x < y$. Protože O_1 je otevřená množina, musí existovat $t > x$ tak, že $\langle x, t \rangle \subset I \cap O_1$. Podívejme se nyní na horní mez pro takováto t, tj. položme

$$s = \sup\{t \mid \langle x, t \rangle \subset O_1 \cap I\}.$$

Toto supremum je jistě konečné, neboť např. musí být $s < y$. Samotné supremum s ovšem do množiny O_1 již patřit nemůže – kdyby ano, pak by díky otevřenosti O_1 existovalo číslo $s' > s$ takové, že $\langle x, s' \rangle \subset O_1 \cap I$. To je ale ve sporu s volbou s jako suprema. Protože $s \in I$

a $O_1 \cup O_2$ pokrývá I, zbývá jen, že $s \in O_2$. To ovšem vzhledem k otevřenosti množiny O_2 znamená, že existuje takové $u < s$ pro které je $\langle u, s\rangle \subset O_2$. Specielně vidíme, že $u \in O_2$. Pak ovšem u nemůže být v O_1, a proto musí být alespoň tak velké jako s, $s \leq u$. Což je spor. Každý interval je tedy souvislá množina.

Předpokládejme nyní, že M je souvislá množina v $\mathbb{R}$, která obsahuje alespoň dva body. Ukážeme, že M je interval. K tomu postačí ověřit, že s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje M všechny body ležící mezi nimi, tj. celý interval $\langle x, y\rangle$. Kdyby tomu tak nebylo, pak existuje t, $x < t < y$, které není v množině M. Položíme-li

$$O_1 = (-\infty, t) \text{ a } O_2 = (t, \infty),$$

získáme dvě otevřené disjunktní množiny. Vzhledem k tomu, že $x \in O_1 \cap M$ a $y \in O_2 \cap M$, jsou obě množiny $O_1 \cap M$, $O_2 \cap M$ neprázdné. A protože $M \subset O_1 \cup O_2$, splňují množiny O_1 a O_2 požadavky (i), (ii) Definice 4.5. Množina M tedy nemůže být souvislá, a to je hledaný spor. Důkaz je ukončen. □

Pokusíme se nyní charakterizovat oblasti (tj. souvislé otevřené množiny) v obecném euklidovském prostoru. Věta 4.6 říká, že jediné netriviální oblasti v $\mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. To jsou množiny, které s každými dvěma body obsahují i celou spojující úsečku. Analogická charakterizace je možná i pro vyšší dimenze, nahradíme-li úsečky lomenými čarami. Připomeňme si, že úsečka spojující dva body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ v euklidovském prostoru je definována jako množina

$$T = \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \mid t \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Zcela stejně jako ve Větě 4.6 probíhá důkaz, že úsečka v euklidovském prstoru je souvislá množina. Nebudeme ho zde proto znovu vypisovat. Názvem lomená čára označujeme sjednocení na sebe navazujících úseček.

Věta 4.7. *Nechť G je množina v euklidovkém prostoru.*

(i) *Lze-li každé dva body množiny G spojit lomenou čarou $L \subset G$, je množina G souvislá.*

(ii) *Je-li G souvislá a navíc otevřená (tj. oblast), pak lze každé dva body z G spojit lomenou čarou $L \subset G$.*

Poznámka 4.8. Bod (i) nám dává pohodlné kriterium pro testování souvislosti. Bod (ii) pak říká, že v případě otevřené množiny, je toto kriterium přímo ekvivalentní souvislosti množiny.

Důkaz. (i) Předpokládejme, že G je množina, jejíž každé dva body lze spojit lomenou čarou L ležící v G. Cílem je dokázat, že G je souvislá. Postupujme sporem. Kdyby nebyla souvislá, pak existují otevřené disjunktní množiny O_1 a O_2 takové, že

$$G \subset O_1 \cup O_2, \quad G \cap O_1 \neq \emptyset \text{ a } G \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Zvolme $\boldsymbol{x} \in G \cap O_1$ a $\boldsymbol{y} \in G \cap O_2$. Víme, že lze najít lomenou čáru L spojující $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Čára L je sjednocením konečně mnoha na sebe navazujících úseček. Alespoň jedna z nich, označme ji T, nepatří celá ani do O_1, ani do O_2. Pak ovšem $O_1 \cap T$, $O_2 \cap T$ je rozklad úsečky na množiny vyhovující podmínkám (i), (ii) v Definici 4.5. To je spor, neboť to by znamenalo, že úsečka není souvislá. Tím je důkaz je proveden.

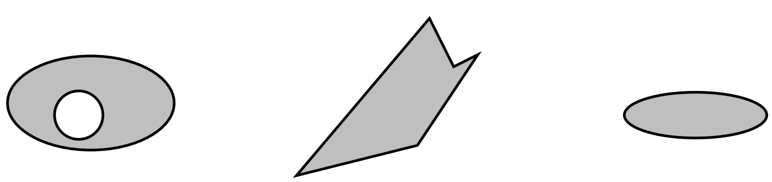
(ii) Nechť G je oblast v euklidovském prostoru. Ukažme, že každé dva body z G je možno spojit lomenou čarou, která je podmnožinou G. Zvolme proto libovolný bod $\boldsymbol{x} \in G$ a definujme si pomocnou množinu $G_{\boldsymbol{x}}$ bodů dosažitelných z $\boldsymbol{x}$ pomocí lomené čáry

$$G_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in G \mid \boldsymbol{y} \text{ lze spojit s } \boldsymbol{x} \text{ lomenou čarou } L \subset G\}.$$

Přímo z definice množiny $G_{\boldsymbol{x}}$ vyplývá, že $G_{\boldsymbol{x}} \subset G$. Podaří-li se odvodit, že $G_{\boldsymbol{x}} = G$, bude důkaz hotov. Nechť $\boldsymbol{y} \in G_{\boldsymbol{x}}$ je libovolný bod. Protože leží také v G, je možno nalézt okolí $U(\boldsymbol{y}) \subset G$. Každý bod z tohoto okolí snadno spojíme úsečkou s jeho středem. Tímto se na každý bod z okolí $U(\boldsymbol{y})$ také dostaneme z bodu $\boldsymbol{x}$ po lomené čáře ležící v G. Proto $U(\boldsymbol{y}) \subset G_{\boldsymbol{x}}$, a to znamená, že $G_{\boldsymbol{x}}$ je otevřená množina.

Kdyby zbylá část $G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$ byla neprázdná, tak stejnou úvahou jako výše zjistíme, že je otevřená: je-li bod $\boldsymbol{y} \in G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$, tj. „nespojitelný“ s bodem $\boldsymbol{x}$ lomenou čarou, musí být nespojitelné i všechny body v jeho okolí. Takže kolem $\boldsymbol{y}$ existuje okolí $U(\boldsymbol{y}) \subset G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$, a proto je $G \setminus G_{\boldsymbol{x}}$ rovněž otevřená. Pak $G = G_{\boldsymbol{x}} \cup (G \setminus G_{\boldsymbol{x}})$ je disjunktním sjednocením neprázdných otevřených množin, což je ve sporu se souvislostí G. Ukázali jsme tím, že $G \setminus G_{\boldsymbol{x}} = \emptyset$, tj. $G = G_{\boldsymbol{x}}$. □

Věta 4.7 říká, že otevřená množina je souvislá právě tehdy, když se z každého výchozího bodu v dané množině dostaneme po úsečkách do libovolného jiného místa aniž množinu opustíme. Přísnější požadavek by byl, aby každé dva body dané množiny bylo možno spojit pouze jedinou úsečkou, která je v množině obsažena. Takovéto množiny se nazývají *konvexní*. Proto každá konvexní množina je souvislá. Zdaleka ne všechny souvislé množiny jsou konvexní. Na obr. 4.2 (a), (b) vidíme souvislé a přitom nekonvexní množiny. Obrázek 4.2 (c) znázorňuje konvexní množinu.



(a) (b) (c)

Obr. 4.2

Jak už jsme naznačili na začátku této části, dokážeme zobecnění věty pro funkce jedné proměnné o tom, že spojitý obraz intervalu je interval. Věta 4.6 říká, že interval je souvislá množina. Nabízí se nám tak následující přeformulace: spojitá funkce jedné proměnné zobrazuje souvislou množinu na souvislou množinu. Takové znění je vhodné pro zobecnění do více proměnných, neboť neobsahuje pojem interval. Skutečně platí

Věta 4.9. *Každá spojitá funkce na euklidovském prostoru zobrazí souvislou množinu na souvislou množinu.*

Důkaz. Nechť M je souvislá množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Naším úkolem je ukázat, že obraz $f(M)$ množiny M je souvislá množina. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $f(M)$ není souvislá. Pak existují otevřené disjunktní množiny $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}$ oddělující části množiny $f(M)$, tj. mají vlastnosti

(i) $f(M) \subset O_1 \cup O_2$;

(ii) $f(M) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(M) \cap O_2 \neq \emptyset$.

Uvažujme nyní množiny $G_1 = f^{-1}(O_1)$, $G_2 = f^{-1}(O_2)$. Jako vzory otevřených množin jsou G_1, G_2 rovněž otevřené množiny podle Věty 3.11. Dále, z (i) plyne

$$M \subset f^{-1}(O_1 \cup O_1) = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) = G_1 \cup G_2.$$

A protože O_1 a O_2 jsou disjunktní, jsou i jejich vzory G_1 a G_2 disjunktní. Ukážeme navíc, že $M \cap G_1 \neq \emptyset$ a $M \cap G_2 \neq \emptyset$. To nám zaručuje podmínka (ii): množina $f(M) \cap O_1$ obsahuje nějaký prvek $y \in f(M) \cap O_1$. Existuje tak $\boldsymbol{x} \in M$, že $f(\boldsymbol{x}) = y$. Protože také $f(\boldsymbol{x}) \in O_1$, je $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(O_1) = G_1$. Dohromady $\boldsymbol{x} \in M \cap G_1$.

Stejný argument platí i v případě $M \cap G_2$. Množiny G_1 a G_2 rozkládají M na dvě neprázdné části, což je v rozporu se souvislostí. □

Poznámka 4.10. V předešlém důkaze si můžeme povšimnout, že jsme nikde nevyužili faktu, že hodnoty $f(\boldsymbol{x})$ jsou reálná čísla. Celý postup, tak jak je napsaný, prochází i v případě, že f je spojité *zobrazení*, $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Vlastně jsme dokázali silnější tvrzení:

Věta 4.11. *Každé spojité zobrazení mezi euklidovskými prostory zobrazuje souvislou množinu na souvislou množinu.*

Příklad 4.12. Ukažme, že elipsa o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

je souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

Z analytické geometrie víme, že danou elipsu je možno popsat parametricky jako množinu $\{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$. Elipsa je tedy obrazem intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ při spojitém zobrazení $f\colon \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Podle Věty 4.9 je tato množina souvislá.

Věta 4.9 má i další důležitý důsledek:

Důsledek 4.13. *Obor hodnot spojité funkce definované na souvislé množině je jednobodová množina nebo interval.*

Důkaz. Věta 4.9 říká, že spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina. Vzhledem k tomu, že v $\mathbb{R}$ jiné neprázdné souvislé množiny než intervaly a jednobodové množiny nejsou (Věta 4.6), je důsledek dokázán. □

Příklad 4.14. Pokusíme se na základě vlastností spojitých funkcí stanovit obor hodnot funkce
$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$
Zadaná funkce je spojitou funkcí definovanou na souvislé množině $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Oborem hodnot je tedy interval. Nerovnost $|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ říká, že
$$-\frac{1}{2}\le f(x,y)\le\frac{1}{2}.$$
Vzhledem k tomu, že $f(1,1)=\frac{1}{2},\ f(-1,1)=-\frac{1}{2}$, musí být oborem hodnot uzavřený interval $\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$.

Jak ukazuje následující příklad na první pohled „teoretické“ věty o vlastnostech spojitých funkcí mohou mít aplikace i při řešení zcela početních úloh.

Příklad 4.15. Ukažme, že následující soustava nelineárních rovnic o neznámých x,y má řešení
$$\begin{aligned}\frac{y}{2}+\operatorname{arctg}xy-\exp\Big(-\frac{x}{2x^2+y^2}\Big)&=0\\ x^2+y^2&=1.\end{aligned}$$

Úlohu můžeme přeformulovat na otázku zda spojitá funkce dvou proměnných
$$f(x,y)=\frac{y}{2}+\operatorname{arctg}xy-\exp\Big(-\frac{x}{2x^2+y^2}\Big)$$
nabývá na kružnici se středem v počátku a poloměrem 1 nulovou hodnotu. Jak již víme, kružnice je souvislá množina, a proto ji f zobrazí na interval. Podívejme se na hodnoty f v bodech $(1,0)$ a $(0,1)$.

$$\begin{aligned}f(1,0)&=\operatorname{arctg}0-e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}>0\\ f(0,1)&=\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}0-1=-\frac{1}{2}<0.\end{aligned}$$

Funkce f má tedy na kružnici alespoň jeden nulový bod. Složky tohoto bodu jsou řešením studované soustavy. Hodnoty neznámých se dají stanovit pouze numericky. Můžeme například modifikovat metodu bisekce a neustálým dělením oblouků kružnice na poloviny stejné délky lokalizovat polohu řešení s libovolnou přesností.

3 Cvičení

1. Funkce f definovaná na euklidovském prostoru X se nazývá Lipschitzovská, jestliže existuje $L>0$ tak, že
$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\le L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\text{ pro všechna }\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X.$$
   (a) Ukažte, že funkce $f(\boldsymbol{x})=\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},M)$ je Lipschitzovská s konstantou $L=1$.

(b) Ukažte, že každá Lipschitzovská funkce je stejnoměrně spojitá.

Rozhodněte zda jsou následující množiny souvislé nebo dokonce konvexní.

2. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x} - (1,1)\| \geq 1\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z > 1\}$;
4. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid 3 \leq \|\boldsymbol{x}\| < 5\}$;
5. $\mathbb{Q}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel;
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^3 + y^3 \leq 8,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
7. Ukažte, že uzávěr souvislé množiny je opět souvislá množina.
8. Ukažte, že množina M v euklidovském prostoru je nesouvislá právě tehdy když existuje neprázdná vlastní podmnožina A množiny M taková, že každý bod množiny A má kladnou vzdálenost od doplňku $M \setminus A$ a každý bod doplňku $M \setminus A$ má kladnou vzdálenost od množiny A.

Výsledky.

1. (a) Vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}$ od M je alespoň tak velká, jako součet vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ od $\boldsymbol{y}$ a vzdálenosti $\boldsymbol{y}$ od M: $f(\boldsymbol{x}) \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + f(\boldsymbol{y})$. Ze symetrie je také $f(\boldsymbol{y}) \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + f(\boldsymbol{x})$. Dohromady, $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. (b) Pro $\varepsilon > 0$ volíme $\delta = \varepsilon/L$. Při $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ je $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < L\delta = \varepsilon$. **2.** souvislá, není konvexn; **3.** konvexní; **4.** souvislá, není konvexní; **5.** není souvislá, je pokryta např. množinami $[O_1 = \{(x,y) \mid x > \sqrt{2}\},\ O_2 = \{(x,y) \mid x < \sqrt{2}\}$; **6.** souvislá, není konvexní; **8.** Položíme $A = (M \cap O_1) \cup (M \cap O_2)$, kde O_1, O_2 jsou množiny z Definice 4.5.

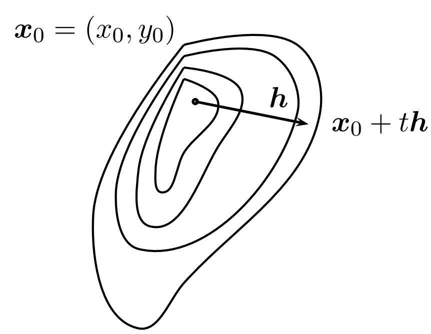
Kapitola 5

Derivace funkcí více proměnných

Derivace je základním pojmem diferenciálního počtu. Při definici derivace pro funkce více proměnných můžeme postupovat dvěma způsoby. První možnost je uvažovat hodnoty dané funkce pouze na jisté přímce. Získáme tak v podstatě funkci jedné proměnné, kterou již derivovat umíme. Tento přístup vede k definici derivace funkce ve směru a bude jí věnována první část kapitoly. Derivace ve směru má názorný význam a je základním početním nástrojem. Její nevýhodou však je, že poskytuje informaci o chování funkce pouze vůči velice speciálním podmnožinám definičního oboru – přímkám. Abychom získali úplnější informaci o hodnotách funkce v okolí daného bodu musíme definovat silnější pojem – diferenciál. Toto pojetí derivace vychází z myšlenky aproximovat přírůstek funkce vhodnou lineární funkcí. Bude mu věnována druhá část této kapitoly. Závěrem se zmíníme o některých geometrických a fyzikálních aspektech derivace funkcí více proměnných.

1 Směrové a parciální derivace

Představme si nejdříve modelovou situaci. Reliéf terénu je dán funkcí $f(x, y)$, která bodu (x, y) v rovině mapy přiřadí nadmořskou výšku $f(x, y)$. Naše výchozí poloha na mapě je bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$. Začneme se pohybovat v terénu takovým způsobem, že vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ rychlosti v rovině mapy bude stále konstantní. Jinými slovy, v horizontální poloze je náš pohyb rovnoměrný a přímočarý, viz obr. 5.1.



Obr. 5.1

Ptáme se, jaká je vertikální složka naší rychlosti. Tato složka je rychlostí změny nadmořské výšky (rychlost stoupání či klesání) a bude záviset jak povaze terénu (funkce f), tak na horizontální rychlosti (vektor $\boldsymbol{h}$). Rychlost je vždy dána limitou poměru velikosti dráhy a času. Naše počáteční nadmořská výška (čas $t = 0$) je $f(x_0, y_0)$. Za čas t se na mapě dostaneme do bodu $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}$ a naše nadmořská výška bude $f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$. Poměr dráhy ve vertikálním směru a času je

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

Přejdeme-li k limitě

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{5.1}$$

dostaneme okamžitou vertikální rychlost v bodě $\boldsymbol{x}_0$. Limita (5.1), jejíž fyzikální význam jsme si objasnili, se nazývá derivace funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ ve směru $\boldsymbol{h}$.

Definice 5.1. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ euklidovského prostoru.* **Derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 \in G$ ve směru $\boldsymbol{h} \in X$** *(krátce* **směrovou derivací***) nazýváme limitu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

K označení této limity budeme používat symbol $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}_0)$.

Je vidět, že derivace ve směru $\boldsymbol{h} = 0$ je vždy nulová.

Poznámka 5.2. (i) Předpokládejme, že funkce f má směrovou derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}_0)$. Pak existuje také derivace f ve směru všech násobků vektoru $\boldsymbol{h}$ a platí přitom

$$\frac{\partial f}{\partial(\tau\boldsymbol{h})}(\boldsymbol{x}) = \tau\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechna} \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Tuto vlastnost můžeme lehce ověřit přímo z definice tím, že provedeme substituci $s = t\tau$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(\tau\boldsymbol{h})}(\boldsymbol{x}) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x} + t\tau\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \lim_{s\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{s/\tau} = \\ &= \tau\lim_{s\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{s} = \tau\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Fyzikální význam tohoto zjištění je zřejmý. Budeme-li se v motivační úvaze pohybovat po mapě dvakrát tak rychle, zvětší se i dvakrát naše vertikální rychlost. Vydáme-li se například v opačném směru, změní vertikální rychlost znaménko, apod.

(ii) Výpočet směrové derivace funkce více proměnných lze převést na nám již známý úkol derivovat funkci jedné proměnné. Stačí totiž položit

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}).$$

Pak

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}_0).$$

Hodnoty pomocné funkce $\varphi(t)$ jsou dány restrikcí funkce f na přímku, která prochází bodem $\boldsymbol{x}_0$ a má směrový vektor $\boldsymbol{h}$. V modelovém příkladu s nadmořskou výškou reprezentuje φ „výškový profil“ a udává naši nadmořskou výšku v čase t.

Příklad 5.3. Nalezněme směrové derivace funkce

$$f(x,y) = e^{x-y^2}$$

v bodě $(0,0)$ ve směru vektorů $(1,0), (-1,0)$ a $(1,1)$.

Nejdříve nalezneme „průřezové funkce“ $\varphi(t)$. Pro $\boldsymbol{h} = (1,0)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,0)) = f(t,0) = e^t,$$

a proto $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0) = \varphi'(0) = e^0 = 1$.

Bude-li $\boldsymbol{h} = (-1,0)$ víme již podle Poznámky 5.2 (i), že derivace musí změnit znaménko. Pro ilustraci se však stejně podívejme na průřez funkce

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(-1,0)) = f(-t,0) = e^{-t}.$$

Skutečně tedy $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0) = \varphi'(0) = -e^0 = -1$. Konečně pro $\boldsymbol{h} = (1,1)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = e^{t-t^2}.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (1-2t)e^{t-t^2}$, je $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0) = \varphi'(0) = 1$.

(ii) Nalezněme směrovou derivaci funkce

$$f(x,y,z) = \sin(xyz)$$

v bodě $(1,0,0)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} = (2,1,1)$.

Podobně jako výše označíme

$$\varphi(t) = f\big((1,0,0) + t(2,1,1)\big) = f(1+2t, 1+t, 0+t) = \sin(t+3t^2+2t^3).$$

Snadným výpočtem

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(1,0,0) = \varphi'(0) = 1.$$

Z Poznámky 5.2 i z konkrétních příkladů vidíme, že derivace ve směru se dá mechanicky převést na výpočet derivace průřezové funkce, která závisí pouze na jediném argumentu. Později uvidíme, že tento výpočet se dá mnohdy pohodlněji provést i bez stanovení průřezové funkce. Redukce na derivaci funkce s jedním argumentem však říká, že pro směrové derivace musí platit stejná pravidla jako pro derivaci funkce pouze jedné proměnné. Pro úplnost si je uvedeme v následující větě.

Věta 5.4. *Nechť f a g jsou funkce definované na otevřené množině G v euklidovském prostoru X. Předpokládejme, že f i g mají derivace v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} \in X$. Pak existují derivace funkcí $f+g$, fg ve směru $\boldsymbol{h}$ a je-li $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$, tak i derivace f/g a platí*

(i) $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}(f+g)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) + \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})$,

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}(fg)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\ \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})$,

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}\Big(\dfrac{f}{g}\Big)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{g(\boldsymbol{x})^2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\ \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})\Big)$ *, je-li* $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

V aplikacích i teorii hrají významnou úlohu směrové derivace vůči kanonickým jednotkovým vektorům standardní baze v $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\dots,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0\dots,0), \dots, \boldsymbol{e}_n = (0,\dots,0,1),$$

Tyto derivace totiž udávají jak daná funkce závisí na jednotlivých proměnných.

Definice 5.5. *Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$.* **Parciální derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ podle k proměnné** x_i $(i = 1,\dots,n)$ *nazýváme směrovou derivaci* $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_i}}(\boldsymbol{x})$*. Pro její označení používáme zápis*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Vektor

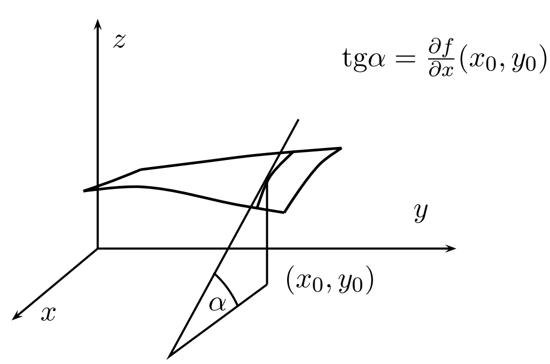
$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

se nazývá **gradient** *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$.*

Podle Poznámky 5.2 je parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ rovna derivaci $\varphi'(0)$, kde

$$\varphi(t) = f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},\dots,x_n)$$

Protože se v této funkci mění pouze i-tá složka, můžeme parciální derivaci spočítat mechanicky tak, že derivujeme podle vyznačené proměnné a ostatní proměnné přitom považujeme za konstanty. Geometrický význam parciálních derivací je odvozen od významu derivace směrové. Každá parciální derivace funkce dvou proměnných například udává směrnici řezu grafem funkce rovnoběžného s příslušnou osou tak, jak je to znázorněno na následujícím obr. 5.2:



Obr. 5.2.

Příklad 5.6. (i) Určíme parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ funkce $f(x,y) = e^{x-y^2}$. Podle postupu naznačeného výše je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-y^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{x-y^2}(-2y).\end{aligned}$$

(ii) Stanovme parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pokud je $(x,y) \neq (0,0)$ můžeme derivovat zcela mechanicky

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^4+y^4) - x^2y^2 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{-2x^5y^2 + 2xy^6}{(x^4+y^4)^2}.$$

Parciální derivaci podle proměnné y můžeme díky symetrii v proměnných získat z předchozího vztahu pouhou záměnou symbolů x a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y^5x^2 + 2yx^6}{(x^4+y^4)^2}.$$

Zvláštní je případ výpočtu parciální derivace v bodě $(0,0)$. Zde musíme uvažovat hodnoty f na souřadnicových osách. Tam je ovšem f konstantní

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \text{ pro všechna } x,y \in \mathbb{R}.$$

Proto jsou obě parciální derivace v bodě $(0,0)$ nulové, což může být také krátce vyjádřeno jako

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0).$$

Na tomto příkladě si povšimněme dvou důležitých okolností. Restrikce funkce $f(x,y)$ na přímku $y = kx$, $k \neq 0$, je funkce nespojitá v bodě 0. Odtud vyplývá, že i celá funkce $f(x,y)$ není v $(0,0)$ spojitá. Přesto obě parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ v bodě $(0,0)$ existují a jsou konečné. Existence vlastních parciálních derivací nezaručuje spojitost.

Druhá zvláštnost je ta, že ze všech směrových derivací v bodě $(0,0)$ existují jen ty ve směru osy x a y. Existence parciálních derivací nezaručuje existenci derivací v ostatních směrech.

Parciální derivace se často používají při popisu systémů (přírodních i společenských věd) a jejich vývoje. Představme si například funkci $u(x,t)$, která udává výchylku struny v bodě x a čase t. Pro pevné t_0 je graf průřezové funkce $u(x,t_0)$ tvar struny v čase t_0. Pro pevné x_0 je další průřezová funkce $u(x_0,t)$ záznamem pohybu bodu na struně se souřadnicí x_0. Jedna parciální derivace $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ tedy souvisí s geometrickým tvarem struny, druhá $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ má fyzikální význam rychlosti daného bodu na struně.

V dalším výkladu budeme často používat následující zobecněnou verzi Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

Věta 5.7. *Nechť f je funkce definovaná na otevřené množině G v euklidovském prostoru. Nechť $I \subset G$ je úsečka s krajními body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in G$. Předpokládejme, že f je spojitá na úsečce I a má v každém vnitřním bodě úsečky bodě I derivaci ve směru $\boldsymbol{h}$. Pak existuje $\vartheta \in (0,1)$ tak, že*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}+\vartheta \boldsymbol{h}) \tag{5.2}$$

nebo

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

Důkaz. Budeme se zabývat restrikcí funkce f na úsečku s krajními body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$. Položíme

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}), \qquad t \in \langle 0,1\rangle.$$

Pak $\varphi(0) = f(\boldsymbol{x})$, $\varphi(1) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a dále $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})$. Funkce φ splňuje všechny předpoklady Lagrangeovy věty pro funkci jedné proměnné. Proto můžeme psát

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta) \text{ pro jisté } \vartheta \in (0,1).$$

Vrátíme-li se k původnímu značení dostaneme rovnost (5.2).

Integrální tvar (5.3) získáme

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int\limits_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}t.$$

□

Chceme-li rozepsat rovnici (5.2) do detailu např. pro funkci dvou proměnných, musíme za $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{h}$ dosadit jejich explicitní vyjádření ve složkách: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$. Pak máme (5.2) v tomto tvaru

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\vartheta h_1, x_2+\vartheta h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+\vartheta h_1, x_2+\vartheta h_2).$$

Směrové a parciální derivace tedy poskytují jistou informaci o chování funkce na dílčích přímkách. To je často málo. Podívejme se na následující příklad.

Příklad 5.8. Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x \neq 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Graf této funkce je parabola bez svého vrcholu vysunutá nad rovinu xy do výšky 1. Pro každou přímku proloženou počátkem najdeme prstencové okolí počátku, ve kterém neleží její průsečík s parabolou $y = x^2$. Blízko počátku má tedy funkce f na těchto přímkách nulovou hodnotu. Znamená to, že

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0) = 0 \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2.$$

Na druhé straně f není v bodě $(0,0)$ spojitá. Neplatí tedy to na co jsme zvyklí z teorie funkcí jedné proměnné. Pro funkce více proměnných ani existence derivací ve všech směrech neimplikuje spojitost.

Tento nedostatek odstraňuje jiné pojetí derivace, silnější než derivace ve směru – derivace ve smyslu lineární aproximace. Ale to už je téma další části.

2 Diferenciál funkce

K zavedení diferenciálu vedla snaha nalézt co nejlepší aproximaci obecné funkce pomocí funkce lineární. Důvod pro takovouto aproximaci je skutečnost, že lineární funkce je jednoduchá a snadno se s ní z početního i teoretického hlediska pracuje. Abychom si to lépe ujasnili, podívejme se nejdříve na „proces linearizace“ funkce jedné proměnné. V tomto případě je obecná lineární funkce tvaru $L(x) = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Nechť $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Budeme studovat rozdíl funkčních hodnot $f(x_0 + h) - f(x_0)$, kde $h \neq 0$ je přírůstek na ose x. Rozdíl funkčních hodnot rozdělíme (zatím zcela spekulativně) na lineární část a blíže nespecifikovaný zbytek $\omega(h)$, který představuje chybu aproximace. Tedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + \omega(h). \tag{5.4}$$

Naši snahou bude zvolit konstantu $a \in R$ tak, aby chyba aproximace $\omega(h)$ byla co nejmenší. První nápad je požadovat, že $\omega(h)$ se bude blížit nule, budeme-li zmenšovat přírůstek h, tj.

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Bude-li ale funkce f spojitá, pak $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$ vyjde automaticky z (5.4), ať už je a jakékoliv. To nám k výběru hodnoty a příliš nepomůže. Zkusme tedy být na chybu $\omega(h)$ přísnější a požadujme, aby dokonce

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0. \tag{5.5}$$

Znamená to, že $\omega(h)$ se musí blížit k nule rychleji než h. Tento požadavek již jednoznačně vymezuje a. Z (5.4) vydělením h máme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{\omega(h)}{h}.$$

Limitním přechodem $h \to 0$ dostaneme závěr, že

$$a = f'(x_0) \text{ právě, když } \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

V případě funkce jedné proměnné je tedy existence nejlepší lineární aproximace ekvivalentní s existencí vlastní derivace funkce f v bodě x_0. Navíc vidíme, že optimální lineární aproximace L, která se nazývá diferenciálem funkce f v bodě x_0, je funkce

$$L(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Závěr, ke kterému jsme došli je možno vyjádřit i geometricky: tečna ke grafu funkce je ze všech přímek procházejících daným bodem nejlepším nahrazením grafu v okolí dotykového bodu.

Z příkladu definice diferenciálu funkce jedné proměnné si vezmeme poučení k definici diferenciálu pro funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Rozdělme přírůstek funkce f ve smyslu následující rovnosti

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = L(\boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{h}), \tag{5.6}$$

kde $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Budeme opět požadovat, aby velikost chyby $\omega(\boldsymbol{h})$ klesala k nule rychleji, než přírůstek argumentu, tj. aby

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

(Zde $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ je vektor, proto musíme chybu $\omega(\boldsymbol{h})$ porovnávat s velikostí vektoru $\boldsymbol{h}$, tj. s $\|\boldsymbol{h}\|$.) Vyjádříme-li $\omega(\boldsymbol{h})$ z rovnice (5.6) dostaneme podmínku

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Toto zobecnění požadavku (5.5) bude základem pro definici diferenciálu.

Definice 5.9. *Nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce na otevřené podmnožině $G \subset \mathbb{R}^n$ v euklidovského prostoru. Řekněme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je* **(totální) diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$** *$\in G$, jestliže*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.7}$$

Zobrazení, které má v daném bodě diferenciál budeme nazývat diferencovatelné. Pro označení diferenciálu zobrazení f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ používáme symbol $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$. (Pozor tento symbol reprezentuje zobrazení!) Hodnotu tohoto zobrazení v bodě $\boldsymbol{h}$ značíme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]$.

Pro funkci f a v právě zavedeném označení vypadá definující limita (5.7) pro diferenciál takto

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.8}$$

Někdy je výhodné požadavek (5.8) vyjádřit následující ekvivalentní podmínkou. Označíme chybu aproximace opět jako

$$\omega(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}].$$

Pak (5.8) lze přepsat do tvaru

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}] + \omega(\boldsymbol{h}), \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{5.9}$$

Tento tvar říká, že rozdíl hodnot funkce f je roven příslušnému diferenciálu plus chyba $\omega(\boldsymbol{h})$, jejíž velikost je zanedbatelná vzhledem k $\|\boldsymbol{h}\|$.

V úvodní pasáži jsme viděli, že funkce jedné proměnné má diferenciál právě tehdy, když má derivaci, přičemž hodnota derivace je koeficient diferenciálu. Dalším samozřejmým příkladem je diferenciál lineárního zobrazení L. V tomto případě je

$$\mathrm{d}L(\boldsymbol{x}) = L \text{ pro všechna } \boldsymbol{x}.$$

Díky linearitě totiž máme

$$\frac{L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{L(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{h}) - L(\boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \mathbf{0}$$

a tudíž volba $\mathrm{d}L(\boldsymbol{x}) = L$ vyhoví rovnosti (5.7). Tento fakt jistě nepřekvapí, neboť co už by mohlo být lepší lineární aproximací lineárního zobrazení než toto zobrazení samotné? Pro ilustraci se podívejme na další příklady.

Příklad 5.10. Ověříme podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$ Za tímto účelem se věnujme limitě v (5.7).

$$\begin{aligned} &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) - L(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ &\quad = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(1+h_1)^2 + (1+h_2)^2 - 2 - 2h_1 - 2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Opravdu tedy platí

$$\mathrm{d}f(1,1)[(h_1, h_2)] = 2(h_1 + h_2).$$

Jak se uhodne, že právě námi zvolené zobrazení je diferenciálem, si řekneme později.

Následující tvrzení dává do souvislosti diferenciál, směrovou derivaci a gradient.

Tvrzení 5.11. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a platí*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n. \tag{5.10}$$

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{h} = 0$, tak rovnice (5.10) je triviálně splněna. Začneme s důkazem první rovnosti. Pro $\boldsymbol{h} \neq 0$ budeme počítat rozdíl

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[t\boldsymbol{h}]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[t\boldsymbol{h}]}{\|t\boldsymbol{h}\|} \, \|\boldsymbol{h}\| \, \frac{|t|}{t} = 0 \end{aligned}$$

podle (5.8). Tím je první rovnost ověřena. Pro ověření druhé rovnosti v (5.10) si vektor $\boldsymbol{h}$ napišme jako lineární kombinaci bazových vektorů:

$$\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n.$$

V důsledku už dokázané první rovnosti a linearity diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n] \\ &= h_1\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_1] + h_2\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_2] + \cdots + h_n\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{e}_n] \\ &= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{h}\cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

□

Příklad 5.12. Pro funkci $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ určete derivaci ve směru $\boldsymbol{h} = (-1,1,1)$ v bodě $\boldsymbol{x} = (1, 2-1)$.

Podle (5.10) stačí skalárně vynásobit směr $\boldsymbol{h}$ a $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (2,4,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = (-1,1,1)\cdot(2,4,2) = 4.$$

Uvedeme si ještě jiný zápis diferenciálu, který je obvyklý v technické literatuře. Nechť $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Označíme si projekce na i-tou souřadnici symbolem x_i, tj. x_i je funkce $x_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $\boldsymbol{h}$ hodnotu

$$x_i(\boldsymbol{h}) = h_i.$$

Tyto funkce je zřejmě lineární. Proto, jak už víme, $\mathrm{d}x_i = x_i$. Diferenciál $\mathrm{d}x_i$ je tak rovněž projekce na i-tou souřadnici,

$$\mathrm{d}x_i[\boldsymbol{h}] = h_i. \tag{5.11}$$

Podle (5.10) je hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{h}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1[\boldsymbol{h}] + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2[\boldsymbol{h}] + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n[\boldsymbol{h}],\end{aligned}$$

kde jsme použili (5.11). Hodnota funkce $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{h}$ je lineární kombinací hodnot funkcí $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ v témže bodě $\boldsymbol{h}$. Koeficienty této lineární kombinace jsou parciální derivace. Můžeme tedy psát rovnost mezi dvěma funkcemi ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n. \tag{5.12}$$

Např. diferenciál funkce dvou proměnných $f(x,y)$ má při této konvenci tvar

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Pro funkci $f(x,y,z)$ pak

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Zde je na místě varování! Symboly $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ neznamenají žádné záhadné nekonečně malé veličiny. Je to označení pro velice jednoduché funkce. V případě $\mathbb{R}^3$ jdou $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ funkce tří proměnných definované

$$\mathrm{d}x[h_1, h_2, h_3] = h_1, \quad \mathrm{d}y[h_1, h_2, h_3] = h_2, \quad \mathrm{d}z[h_1, h_2, h_3] = h_3.$$

Ve zkráceném označení, kdy $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ je zápis

$$\mathrm{d}x[\boldsymbol{h}] = h_1, \quad \mathrm{d}y[\boldsymbol{h}] = h_2, \quad \mathrm{d}z[\boldsymbol{h}] = h_3.$$

Tento způsob se nám bude hodit při zkoumání derivací složených zobrazení.

Víme již, jak diferenciál funkce vypadá. Nevíme však zatím, v jakých případech existuje. Jak ukazuje následující důležitá věta, je nutnou podmínkou existence diferenciálu spojitost funkce.

Věta 5.13. *Každá funkce diferencovatelné v daném bodě je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Funkce f, která je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}$ je definovaná na jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}$ a podle (5.8) platí

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] + \omega(\boldsymbol{h}),$$

kde $\omega(\boldsymbol{h})/\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$. Tím spíše i $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \omega(\boldsymbol{h}) = 0$. Limitním přechodem v předchozím vztahu tak dostaneme

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{0}] = f(\boldsymbol{x}).$$

Funkce f je tedy spojitá a důkaz je ukončen. $\square$

Z Příkladu 5.8 víme, že samotná existence všech směrových derivací v daném bodě ještě neznamená spojitost v daném bodě. Tím spíše diferencovatelnost. Ukazuje se však, že při přísnějším požadavku na parciální derivace již diferenciál musí existovat. Toto kritérium existence diferenciálu je obsahem následující věty.

Věta 5.14. *Nechť f je funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{x}$. Pak f má v bodě $\boldsymbol{x}$ diferenciál.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro funkci dvou proměnných. Obecný případ se liší pouze počtem proměnných, a tedy jen delšími zápisy příslušných výrazů.

Spojitost parciálních derivací mimo jiné znamená, že jsou v jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}$ definovány. Tvrzení 5.11 nám poskytuje pouze jediného kandidáta na diferenciál. Je to lineární funkce tvaru

$$L(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}).$$

Musíme ovšem dokázat, že

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \omega(\boldsymbol{h}), \text{ kde } \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Protože máme informaci jen o parciálních derivacích, musíme si rozdíl funkčních hodnot v bodech $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}$ zapsat následovně: Označíme $\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2$. Pak

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x}).$$

Oba rozdíly ještě upravíme podle Věty 5.7 o střední hodnotě. Její předpoklady o existenci derivací v uvažovaných směrech jsou splněny, neboť v prvním rozdílu jde o úsečku ve směru $\boldsymbol{e}_1$ a ve druhém ve směru $\boldsymbol{e}_2$.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial h_1\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2 + \vartheta_1 h_1 \boldsymbol{e}_1) + \frac{\partial f}{\partial h_2\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x} + \vartheta_2 h_2 \boldsymbol{e}_2) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2 + \vartheta_1 h_1 \boldsymbol{e}_1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x} + \vartheta_2 h_2 \boldsymbol{e}_2), \end{aligned}$$

pro nějaké hodnoty $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$. Chyba $\omega(\boldsymbol{h})$ má teď tvar

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \\ &= h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2 + \vartheta_1 h_1 \boldsymbol{e}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) + h_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x} + \vartheta_2 h_2 \boldsymbol{e}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right). \end{aligned}$$

Díky spojitosti parciálních derivací mají oba rozdíly v závorkách nulovou limitu pro $\boldsymbol{h} \to 0$. Odtud

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} &= \lim_{\boldsymbol{h}\to \boldsymbol{0}} \frac{h_1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x} + h_2\boldsymbol{e}_2 + \vartheta_1 h_1 \boldsymbol{e}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) \\ &\quad + \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{h_2}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x} + \vartheta_2 h_2 \boldsymbol{e}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) = 0, \end{aligned}$$

neboť zlomky $h_1/\|\boldsymbol{h}\|$ a $h_2/\|\boldsymbol{h}\|$ jsou v absolutní hodnotě nejvýše 1. □

Spojitost parciálních derivací tedy postačí pro existenci diferenciálu. Je to velmi pohodlné kritérium, které můžeme použít v drtivé většině aplikací. Není to však podmínka nutná. Existuje totiž funkce, která nemá spojité parciální derivace, ale přesto je diferencovatelná (Cvičení 12.).

Funkce, které mají spojité parciální derivace podle všech proměnných, se nazývají *spojitě diferencovatelné*. Je to silnější požadavek než pouhá diferencovatelnost.

Podívejme se na příklad, jak nám Věta 5.14 pomůže ve zjištění, kde má funkce diferenciál.

Příklad 5.15. Nechť $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Budeme vyšetřovat diferenciál v obecném bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pro $(x,y) \neq (0,0)$ můžeme určit parciální derivace mechanickým derivováním složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x. \end{aligned}$$

Tyto derivace jsou spojité a na základě Věty 5.14 můžeme konstatovat, že f je diferencovatelná v každém bodě množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pro tyto body máme

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) y \ \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \operatorname{sgn}(xy) x \ \mathrm{d}y.$$

Zvláštním případem je bod $(0,0)$. Protože je f je identicky rovna nule na souřadnicových osách je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Jediný možný kandidát na diferenciál je tedy nulová funkce. Zabývejme se proto výrazem

$$\frac{f(\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{0}) - 0}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Tento výraz nemá limitu pro $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, neboť vzhledem k souřadnicovým osám je limita nulová, zatímco vzhledem přímce o rovnici $h_1 = h_2$ je rovna $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v počátku.

Z teorie funkce jedné proměnné víme, že funkce s nulovou derivací na intervalu je konstantní. Následující věta je zobecněním této skutečnosti.

Věta 5.16. *Funkce, která má na okolí U bodu $\boldsymbol{x}$ nulové všechny parciální derivace, je na tomto okolí konstantní.*

Důkaz. Nechť f je funkce s nulovými parciálními derivacemi na okolí U. Tyto parciální derivace jsou samozřejmě spojité v U, a proto je f diferencovatelná v každém bodě U podle Věty 5.14. Protože $\mathrm{d}f = 0$ na U, jsou nulové i všechny směrové derivace (viz. Tvrzení 5.11). Zvolíme si libovolně dva body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ a ukážeme, že $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.

Nechť L je úsečka spojující body $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Z Věty 5.7 o střední hodnotě víme, že pro jistý bod $\boldsymbol{z} \in L$ platí

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}(\boldsymbol{z}) = 0.$$

Tím je důkaz ukončen. □

Poznámka 5.17. Věta 5.16 je formulována pro okolí bodu U. Platí však i pro obecnější množiny, tzv. souvislé množiny (viz Kap.4, část 2). Pokud čtenář nechce jít do hloubky a prostudovat si tento pojem, pro valnou většinu příkladů postačí intuitivní představa, že souvislá množina je taková, která se neskládá z více oddělených kusů.

S aplikací Věty 5.16 se můžeme setkat v teorii potenciálu [1]. Její parafrází je, že dvě funkce se stejnými parciálními derivacemi se liší pouze o konstantu.

Příklad 5.18. Ověřte platnost následujícího vzorce často uváděného v technické literatuře

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

Ukážeme nejdříve, že funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ a $g(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ mají stejné parciální derivace. Skutečně,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{1 - xy + (x+y)y}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Stejně tak $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ z důvodu symetrie v proměnných. Uvažujme množinu

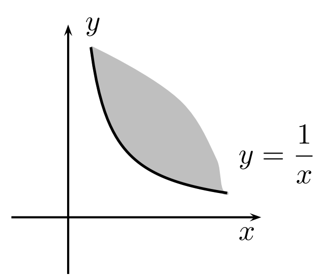
$$G = \{(x, y) \mid x > 0, xy > 1\}.$$

(V ostatních případech je postup analogický a přenecháme jej čtenáři.) Množina G je část roviny nad větví hyperboly, viz obr. 5.3. Protože G je souvislá, můžeme podle poznámky 5.17 aplikovat Větu 5.16. Dostaneme, že $f - g =$ konst na G. Zbývá ukázat, že tato konstanta musí být rovna číslu π. Podívejme se například na hodnoty funkce $f - g$ na polopřímce $\{(1, y) \mid y > 1\}$. Zde máme

$$\text{konst} = f(1, y) - g(1, y) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{1 + y}{1 - y}.$$

Limitním přechodem $y \to \infty$ v této rovnosti dostaneme

$$\text{konst} = \pi/4 + \pi/2 - \operatorname{arctg}(-1) = \pi/4 + \pi/2 + \pi/4 = \pi.$$



Obr. 5.3

3 Geometrický a fyzikální význam diferenciálu

V předchozích částech jsme se věnovali otázce existence diferenciálu a jeho výpočtu. Nyní si uvedeme několik aplikací dříve získaných poznatků.

3.1 Gradient jako směr největšího spádu

V tom to odstavci si přiblížíme fyzikální význam gradientu. Vraťme se opět k modelové situaci, se kterou jsme začali v úvodu této kapitoly. Naše poloha na mapě má souřadnice (x_0, y_0). V terénu, který je grafem funkce $f(x, y)$ se budeme v průmětu na mapu pohybovat rovnoměrně přímočaře s jednotkovou rychlostí $\boldsymbol{h}$, $\|\boldsymbol{h}\| = 1$. Zajímá nás v jakém směru máme největší vertikální rychlost. Tato rychlost je rovna směrové derivaci $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(x_0, y_0)$. Z důležité rovnosti (5.10) víme, že

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(x_0, y_0) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0).$$

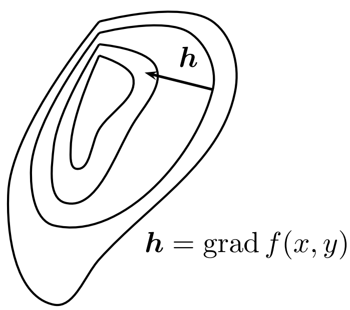
Použijeme-li na tento skalární součin vztah (1.2), dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(x_0, y_0) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \cdot \|\boldsymbol{h}\| \cdot \cos \alpha = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \cdot \cos \alpha.$$

Hodnota směrové derivace je největší pro $\alpha = 0$ a nejmenší pro $\alpha = \pi$.

$$\boldsymbol{h}_{\max} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$$
$$\boldsymbol{h}_{\min} = -\frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}.$$

Vydáme-li se tedy ve směru gradientu budeme maximálně stoupat. Půjdeme-li ve směru opačném budeme maximálně klesat (vertikální rychlost bude záporná). V případě pohybu ve směru kolmém na gradient budeme mít vertikální rychlost nulovou. V tomto případě se nadmořská výška měnit nebude a my se budeme pohybovat po vrstevnici viz. obr 5.4.



Obr. 5.4

Směr gradientu je proto kolmý na hladiny konstantnosti funkce f.

Význam gradientu jsme si vysvětlili v případě funkce dvou proměnných. Všechny argumenty, které jsme použili jsou ovšem platné i v obecném případě.

Příklad 5.19. Hora má tvar eliptického paraboloidu, který je grafem funkce

$$f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2.$$

V jejím vrcholu $(0, 0, 1)$ stojí lyžař. Po jaké dráze se má pohybovat, aby se z vrcholu dostal do bodu $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ a přitom aby jeho vertikální rychlost byla v každém bodě maximální možná?

Lyžař se musí pohybovat po křivce největšího spádu. Popišme si dráhu pohybu pomocí dvojice funkcí $(x(t), y(t))$ udávající průmět polohy lyžaře do roviny xy v čase $t \geq 0$. Aby maximalizoval rychlost v každém bodě, musí se lyžař pohybovat ve směru gradientu, tj. ve směru

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (-2x, -4y).$$

Horizontální složka vektoru rychlosti, tj. vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ je tedy násobkem vektoru $(-2x(t), -4y(t))$. Neboli (za nutných předpokladů nenulovosti jmenovatelů)

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{2y(t)}$$

Integrací podle t vztahu dostaneme

$$\ln |x(t)| = \ln \sqrt{|y(t)|} + c.$$

Po „odlogaritmování“ a přeznačení konstanty

$$|x(t)| = k\sqrt{|y(t)|}.$$

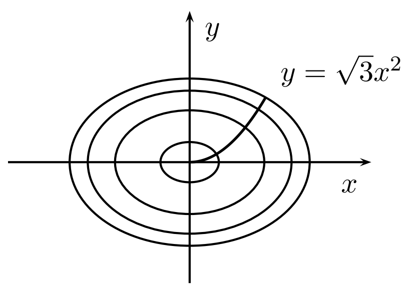
Jinými slovy, dráha musí respektovat rovnici

$$|x| = k\sqrt{|y|} \tag{5.13}$$

a procházet bodem $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Dosazením hodnot $x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ získáme $k = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Umocněním vztahu (5.13) dostáváme výsledek

$$y = \sqrt{3}x^2,$$

což je rovnice paraboly. Lyžař se tedy bude pohybovat po vypočtené parabole, která má tu vlastnost, že je kolmá ke všem vrstevnicím. Vrstevnice jsou přitom tvořeny soustavou elips se středem v počátku, viz. obr. 5.5.



Obr. 5.5

3.2 Tečná rovina a normála ke grafu funkce

Důležitý pohled na význam gradientu dává ještě jiná interpretace. Předpokládejme, že máme funkci

$$z = f(x, y).$$

Tuto rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$F(x, y, z) = 0, \text{ kde } F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Vidíme, že graf původní funkce f je nulovou vrstevnicí funkce F. Protože vektor $\operatorname{grad} F$ je kolmý na vrstevnice, je kolmý na graf funkce f. Každý nenulový násobek tohoto vektoru nazýváme **normálový vektor** ke grafu funkce $z = f(x, y)$:

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} F = \operatorname{grad}(f(x, y) - z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).$$

Specielně pro rovnici roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

vidíme, že gradient je vektor (a, b, c). To je známý výsledek z lineární algebry.

Předpokládejme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0). Geometricky tento fakt znamená, že existuje tečná rovina T ke grafu funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$. Jak najít rovnici pro tuto těčnou rovinu?

Má-li bod $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ ležet na tečné rovině musí být vektor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ kolmý na normálu,

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ \text{tj}\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\Big) = 0. \tag{5.14}$$

Provedením skalárního součinu a úpravou dostaneme rovnici tečné roviny,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - z - \Big(x_0\frac{\partial f}{\partial x} + y_0\frac{\partial f}{\partial y} + z_0\Big) = 0. \tag{5.15}$$

Příklad 5.20. (i) Nalezněme tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(1, 1, 1)$.

Funkce f má spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x$, a proto je diferencovatelná v každém bodě. Tečná rovina je tedy definována všude. Konkrétně pro bod $(1, 1, 1)$ dostaneme z (5.14) rovnici

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (1, 1, -1) = 0, \quad \text{tj.} \quad x + y - z - 1 = 0.$$

(ii) Zabývejme se tečnými rovinami ke grafu funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

tedy ke kuželové ploše, viz obr.2.5(b). Pro nenulový bod (x_0, y_0) máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Vzhledem ke spojitosti parciálních derivací je funkce f diferencovatelné v bodě (x_0, y_0). Podle (5.14) má tečná rovina rovnici

$$(x - x_0)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + (y - y_0)\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - (z - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}) = 0.$$

Po úpravě

$$x_0 x + y_0 y - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\, z = 0.$$

Výjimkou je případ $(0, 0)$ – vrchol kuželové plochy. V tomto bodě neexistují ani parciální derivace funkce f, neboť například $f(x, 0) = |x|$ nemá derivaci v nule. Graf funkce f nemá v bodě $(0, 0)$ tečnou rovinu, což je geometricky zřejmé.

Příklad 5.21. Uvažujme povrch elipsoidu o rovnici

$$\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1. \tag{5.16}$$

V jakém bodě je tečná rovina k elipsoidu rovnoběžná s rovinou σ o rovnici $x+y-2z=0$?

Má-li být tečná rovina rovnoběžná s rovinou σ, musí být rovnoběžné jejich normálové vektory. Normálový vektor k rovině σ je gradient funkce $f(x,y,z)=x+y-2z$, tj.

$$\boldsymbol{n}_1=(1,1,-2).$$

Normálový vektor k elipsoidu je gradient funkce

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{9}-1,$$

tj. $\boldsymbol{n}_2=(x,2y,2z/9)$. Rovnoběžnost $\boldsymbol{n}_1$ a $\boldsymbol{n}_2$ je ekvivalentní s tím, že jeden vektor je nenulový násobek druhého.

$$\alpha(1,1,-2)=\Big(x,2y,\frac{2z}{9}\Big).$$

Porovnáním odpovídajících složek odtud dostaneme

$$\begin{aligned} x&=\alpha\\ y&=\frac{\alpha}{2}\\ z&=-9\alpha. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Poslední informace, kterou máme k dispozici, je že příslušný bod leží na elipsoidu. Dosadíme tedy do rovnice (5.16)

$$\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{81\alpha^2}{9}=1.$$

Řešením jsou hodnoty $\alpha=\pm 2/\sqrt{39}$. Máme dva body na elipsoidu vyhovující zadání úlohy

$$\pm\Big(\frac{2}{\sqrt{39}},\frac{1}{\sqrt{39}},\frac{-18}{\sqrt{39}}\Big).$$

Kromě výše uvedených aplikací se diferenciál používá v situacích, kdy se snažíme nahradit (za cenu přijatelné chyby) nelineární funkci funkcí lineární. Na tomto principu je založena řada „přibližných vzorců“ a odhadů.

Příklad 5.22. Aproximujme funkci

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$$

v okolí bodu $(0,0)$ lineární funkcí.

Aproximace je založena na použití diferenciálu.

$$f(x,y)\approx f(0,0)+\,\mathrm{d}f(0,0)[(x,y)],\qquad x\approx 0,\ y\approx 0.$$

Konkrétně,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1.$$

Proto $\mathrm{d}f(0,0)[(x,y)]=x+y$ a dostaneme přibližný odhad

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

O chybě tohoto odhadu se dozvíme více v souvislosti s Taylorovým polynomem pro funkce více proměnných.

4 Cvičení

Úloha: Teplota $T(x,y)$ v bodě (x,y) roviny je

$$T(x,y) = e^{-x-2y}.$$

V bodě $(0,0)$ je částice, která se pohybuje rychlostí 2 (m/s) na východ a 3 (m/s) na jih. Jaká je okamžitá rychlost změny její teploty v bodě $(0,0)$.

Řešení: Hledaná rychlost je směrovou derivací $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0)$, $\boldsymbol{h} = (2,-3)$. Protože funkce T má spojité parciální derivace

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -e^{-x-2y}, \ \frac{\partial T}{\partial y} = -2e^{-x-2y},$$

je diferencovatelná a

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{h}}(0,0) = 2\frac{\partial T}{\partial x}(0,0) - 3\frac{\partial T}{\partial y}(0,0) = 4.$$

Úloha: Výchylka struny $u(x,t)$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ a čase $t \in \mathbb{R}$ se řídí zákonem

$$u(x,t) = 2\sin(\omega t + x), \qquad \omega > 0;$$

Určete rychlost struny v bodě $x = 5$ a čase $t = 10$. Stanovte dále tečnu ke struně v bodě $x = 5$ a čase $t = 5$.

Řešení: Hledaná rychlost je parciální derivací $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\omega\cos(\omega t + x)$ v bodě $(5,10)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(5,10) = 2\omega\cos(10\omega + 5).$$

Pro stanovení tečny je podstatné nalézt její směrnici

$$k = \frac{\partial u}{\partial x}(5,5) = 2\cos(5\omega + 5).$$

Rovnice hledané tečny vznikne dosazením do obecného tvaru $y = k(x - x_0) + y_0$,

$$y = 2\cos(5\omega + 5)(x - 5) + 2\sin(5\omega + 5).$$

Úloha: Tlak p osmi grammolekul ideálního plynu klesá rychlostí 0.4 a jeho teplota T klesá rychlostí 0.5 . Jak rychle se mění objem V, když počáteční hodnoty jsou $V = 1000$ a $p = 3$. Stoupá či klesá?

Řešení: Podle stavové rovnice je

$$V(p,T) = \frac{8RT}{p},$$

kde R je plynová konstanta. Při zadaných parametrech V a p je $T = \dfrac{3000}{8R}$. Změna objemu je dána směrovou derivací

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{h}}\Big(3, \frac{3000}{8R}\Big), \text{ pro } \boldsymbol{h} = (-0.4, -0.5).$$

K výpočtu můžeme vzhledem k diferencovatelnosti funkce použít parciální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{8RT}{p^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{8R}{p},$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}\left(3, \frac{3000}{8R}\right) = -\frac{1000}{3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T}\left(3, \frac{3000}{8R}\right) = \frac{8}{3}R.$$

Konečně po výpočtu

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{h}}\left(3, \frac{3000}{8R}\right) = -0.4 \cdot \left(-\frac{1000}{3}\right) - 0.5\frac{8}{3}R = \frac{4}{3}(100 - R) > 0.$$

($R \doteq 8,315$). Vypočtená směrová derivace je kladná a objem tedy roste.

Úloha: Určete směrové derivace funkce

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$$

v bodě $(0, 0, 0)$. Rozhodněte zda v tomto bodě existuje diferenciál.

Řešení: Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0, 0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3 + h_3^3}}{t} = \sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3 + h_3^3}.$$

Kdyby existoval diferenciál $\mathrm{d}f(0, 0, 0)$, pak podle Tvrzení 5.11 musí směrové derivace $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(0, 0, 0)$ záviset na směru $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ lineárně. Vidíme ale, že směrové derivace nezávisí lineárně na $\boldsymbol{h}$. Funkce f tedy není diferencovatelná v bodě $(0, 0, 0)$.

Úloha: Má funkce $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} e^{-1/\|\boldsymbol{x}\|^2} & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

diferenciál v počátku?

Řešení: Spočteme nejdříve parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{0}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-1/t^2}}{t} = 0.$$

(Poslední limitu je možno substitucí $s = 1/t^2$ spočítat pomocí l'Hospitalova pravidla.) Všechny parciální derivace jsou v počátku nulové, a proto jediný možný diferenciál je nulové zobrazení. O tom se musíme přesvědčit výpočtem definiční limity 5.7

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{e^{-1/\|\boldsymbol{h}\|^2} - 0 - 0}{\|\boldsymbol{h}\|}.$$

Po substituci $t = \|\boldsymbol{h}\|$ vidíme podle předchozího výpočtu, že tato limita je skutečně nulová. Funkce f je tedy diferencovatelná v bodě $\mathbf{0}$ a její diferenciál je v tomto bodě nulová funkce.

Úloha: Nalezněte vzdálenost roviny ϱ o rovnici $x + y - z = 5$ od paraboloidu zadaného podmínkou $z \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Řešení: Nejbližší bod na paraboloidu musí být dotykovým bodem tečné roviny rovnoběžné s rovinou ϱ. To znamená, že normálový vektor k paraboloidu v zatím neznámém bodě dotyku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je násobkem normálového vektoru roviny ϱ. Normála k paraboloidu je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = (x_0, y_0, -1)$$

a normála k ϱ je vektor $(1, 1, -1)$. Tedy $(x_0, y_0, -1) = k(1, 1, -1)$ pro jisté $k \in \mathbb{R}$. Porovnáním třetích složek okamžitě vidíme, že $k = 1, x_0 = y_0 = 1$. Bod o souřadnicích (1,1,1) je hledaným nejbližším bodem na paraboloidu. Jeho vzdálenost od roviny ϱ je (po snadném výpočtu) $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Úloha: Pro gradient funkce f platí $\operatorname{grad} f(x, y) = (3x, y)$ pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Stanovte vrstevnice této funkce.

Řešení: Nechť vrstevnice je křivka popsaná parametricky $(x(t), y(t))$. O funkcích $x(t), y(t)$ budeme předpokládat, že jsou spojitě diferencovatelné na jistém intervalu. Gradient je kolmý na vrstevnice, což znamená, že vektory $(3x(t), y(t))$ a tečný vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ k vrstevnici svírají pravý úhel. Platí proto, že jejich skalární součin je nulový:

$$(3x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t))) = 3x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = 0,$$

neboli

$$3x(t)\dot{x}(t) = -y(t)\dot{y}(t).$$

Po integraci podle t

$$\frac{3}{2}x^2(t) = -\frac{y(t)^2}{2} + c.$$

Vrstevnice jsou tedy elipsy o rovnicích

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = C, \quad C > 0.$$

Úloha: Je měřena kinetická energie částice o hmotnosti m a rychlosti v. Relativní chyba při stanovení hmotnosti je 1%, při stanovení rychlosti 2%. Použitím diferenciálu stanovte odhad pro relativní chybu měřené energie.

Řešení: Pro konetickou energii E platí

$$E(m,v) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Diferenciál této funkce je

$$\mathrm{d}E(m,v) = \frac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m + mv\,\mathrm{d}v.$$

Odhad chyby příslušné funkce dostaneme tak, že nahradíme hodnotu přírůstku energie $E(m+\Delta m, v+\Delta v) - E(m,v)$ hodnotou diferenciálu $\mathrm{d}E(m,v)$ na vektor $(\Delta m, \Delta v)$:

$$\Delta E = E(m+\Delta m, v+\Delta v) - E(m,v) \approx \mathrm{d}E(m,v)[\Delta m, \Delta v].$$

Tímto způsobem získáme odhad relativní chyby

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}v^2\Delta m + mv\Delta v}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta v}{v} \leq 0,01 + 2\cdot 0,02 = 0,05.$$

Podle tohoto odhadu by přibližná horní mez pro relativní chyby byla 5%.

1. Nalezněte derivaci $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})$, kde $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2x_3^4 - x_4^2$, $\boldsymbol{h} = (1,2,3,4)$ a $\boldsymbol{x} = (-2,3,1,5)$.

2. Nalezněte parciální derivace funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   v počátku.

3. Poloměr válce klesá rychlostí 12, jeho výška stoupá rychlostí 25. Jak se mění objem při poloměru 45 a výšce 100?

4. Hmotnost částice klesá rychlostí 2. Jak rychle musí při jednotkové hmotnosti i rychlosti stoupat rychlost, aby kinetická energie rostla?

5. Ukažte, že funkce $z(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ vyhovuje rovnici

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

6. Ukažte, že funkce $z(x,y) = y^2\sin(x^2-y^2)$ vyhovuje rovnici

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

7. Ukažte, že stavové veličiny ideálního plynu vyhovují rovnici

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

8. Rozhodněte zda je následující funkce diferencovatelná v počátku

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

9. Ukažte, že funkce mající omezené parciální derivace je stejnoměrně spojitá.

10. Rozhodněte zda funkce

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[5]{x_1^5 + \cdots + x_n^5}$$

je diferencovatelná v bodě $\mathbf{0}$.

11. Ve kterých bodech je diferencovatelná funkce n proměnných $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ daná předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|?$$

12. Ukažte, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ daná

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}\|^2 \sin \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

je diferencovatelná v bodě $\mathbf{0}$. Ukažte, že parciální derivace této funkce nejsou v bodě $(0,0)$ spojité.

13. Funkce $f(x,y)$ se nazývá homogenní stupně n, platí-li

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y) \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že má-li f parciální derivace, pak platí tzv. Eulerův vztah

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

14. Nalezněte obecné řešení rovnice $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = f$.

15. Stanovte diferenciál funkcí

$$f(x,y,z) = xy^2z^5, \quad g(x,y,z) = \cosh(xy - z).$$

16. Pomocí Věty 5.16 ukažte, že

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Nalezněte tečné roviny ke grafu funkce f v zadaném bodě

17. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, (1,1, ?);
18. $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$, (1, ?, 2);
19. $f(x,y) = xy$, (?, 2,2);
20. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, (1,1,?).
21. Nalezněte tečnou rovinu k dané ploše.
    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ v bodě $(1, -2, 3)$,
    b) $xy + yz + zx = -1$ v bodě $(?, 2, -1)$,
    c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)+1}$ v bodě $(1, ?, -1)$.
22. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.
23. Najděte tečnou rovinu k elipsoidu $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, která vytíná stejné úseky na všech souřadnicových osách.
24. Spočtěte úhel mezi dvěma plochami v daném bodě.
    a) $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$ v bodě $(2, 0, 2)$,
    b) $z^2 + x^2 - y^2 = 4$, $2x + y - z = 1$ v bodě $(1, 1, 2)$.
25. Nalezněte úhel, který v bodě (1,0,0) svírají grafy funkcí
$$f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad g(x,y) = e^{xy} - 1.$$
26. Nalezněte vzdálenost roviny o rovnici $x + y + z = 5$ od koule se středem v počátku a poloměrem jedna.
27. Najděte délku úseku přímky o rovnici $x = -1, y = 4$ mezi průsečíkem s grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ a průsečíkem s tečnou rovinou ke grafu f v bodě $(0, 2, 2)$.
28. Napište rovnici tečny k zadané křivce v zadaném bodě.
    a) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ v bodě $(2, 0)$,
    b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ v bodě $(8, 1)$.
29. Potenciál v kovové struktuře je dán vztahem
$$V(x,y,z) = \frac{1}{0,02 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$
V jakých směrech roste v bodě $(1, -1, 2)$ potenciál nejrychleji a nejpomaleji? Stanovte tečnu k dráze volné nabité částice procházející tímto bodem !

30. Hora má tvar grafu funkce

$$h(x, y) = 3000 - 2x^2 - y^2.$$

Předpokládejme, že horolezec je v bodě $(30, -20, 800)$. V jakém směru se má pohybovat tak aby šel nejstrměji nahoru. V jakém směru se má pohybovat, aby si udržel stejnou nadmořskou výšku?

31. Nalezněte dráhu nabité částice pohybující se v rovině s rozložením potenciálu

$$V(x, y) = 50 - x^2 - 4y^2,$$

víme-li, že prochází bodem $(1, -2)$.

32. Teplota koule je dána vztahem

$$T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-z^2}.$$

Teplomilná částice se pohybuje ve směru největšího teplotního spádu. Stanovte její dráhu, je-li v start v bodě $(1, 1, 1)$.

Odvoďte následující přibližné odhady

33. $(1 + x)^m(1 + y)^n \approx 1 + mx + ny, \quad x \approx 0,\ y \approx 0;$

34. $x^y \approx 2x + 2y - 5, \quad x \approx 1, y \approx 2;$

35. $\operatorname{arctg}(xy) \approx \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{x+y}{2}, \quad x \approx 1, y \approx 1.$

36. $\operatorname{arctg}(1 + xy) \approx x + y, \quad x \approx 0,\ y \approx 0;$

Pomocí aproximace diferenciálem odhadněte následující hodnoty

37. $\ln(\sqrt{0,96} + \sqrt[3]{1,02} + 2);$

38. $4,004 \cdot 2,002^2 \cdot 3,003^3.$

39. O kolik se přibližně změní úhlopříčka a plošný obsah obdélníku se stranami 12 m a 9 m, zvětší-li se první strana o 2 cm a druhá zmenší o 4 cm?

Výsledky.

1. -6; **2.** $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$; **3.** klesá; **4.** zrychlení > 1; **8.** Ukažte, že existuje K, že $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \le K\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$; **9.** není; **10.** není; **11.** $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; **13.** Vyjádřete $\frac{\partial f}{\partial(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}(x, y)$; **14.** f je typu „lineární zobrazení + konstanta“; **15.** $\mathrm{d}f = y^2z^5\,\mathrm{d}x + 2xyz^5\,\mathrm{d}y + 5xy^2z^4\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}g = y\sinh(xy - z)\,\mathrm{d}x + x\sinh(xy - z)\,\mathrm{d}y - \sinh(xy - z)\,\mathrm{d}z$ **17.** $4x + 2y - z - 3 = 0$; **18.** $5x + y - z - 3 = 0$; **19.** $2x + y - z - 2 = 0$; **20.** $2x - 2y + 4z - \pi = 0$; **21.** a) $x - 2y + 3z = 14$, b) $x + 3z + 2 = 0$, c) $x + y + z = 1$; **22.** $4x + 2y + z \pm \sqrt{19} = 0$; **23.** $x + y + z \pm \sqrt{50} = 0$; **24.** a) $\pi/2$, b) $\cos\alpha = 1/6$, tj. $\alpha \approx 80°$; **25.** $\pi/3$; **26.** $5/\sqrt{3} - 1$; **27.** 5; **28.** a) $= 0$, b) $x + 2y = 10$; **29.** $\pm(-1, 1, -2)$, $p(t) = t(-1, 1, -2) + (1, -1, 2)$; **30.** $(-3, 1)$, $\pm(1, 3)$; **31.** $y = -2x^4$; **32.** Křivka $\varphi(t) = (1 - t, (1 - t)^2, 1 - t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$; **39.** -0.8 cm, -0.3 m^2.

Kapitola 6

Další vlastnosti derivací

1 Derivace složeného zobrazení

Mezi základní pravidla týkající se derivací funkcí jedné proměnné patří pravidlo o derivaci složené funkce. Bez něj bychom uměli derivovat pouze základní typy funkcí. Typická situace je např. následující: Do funkce $f(x,y)$ dvou proměnných dosadíme za x a y jiné funkce dvou proměnných

$$x = \varphi_1(s,t), \quad y = \varphi_2(s,t).$$

Vznikne tak nová funkce proměnných s, t

$$F(s,t) = f\big(\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t)\big).$$

Rádi bychom zjistili, jak vyjádřit $\frac{\partial F}{\partial s}$ a $\frac{\partial F}{\partial t}$ pomocí derivací funkce $f(x,y)$ a derivací funkcí $\varphi_1(s,t)$ a $\varphi_2(s,t)$. Následující věta řeší tuto situaci obecně.

Věta 6.1. *Mějme n funkcí $\varphi_1(s_1,\ldots,s_k),\ldots,\varphi_n(s_1,\ldots,s_k)$ závisících na k proměnných $s_1,\ldots,s_k$. Předpokládejme, že všechny mají v bodě $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_k)$ totální diferenciál. Označíme*

$$\boldsymbol{x}_0 = \big(\varphi_1(\boldsymbol{s}),\ldots,\varphi_n(\boldsymbol{s})\big).$$

Je-li $f(x_1,\ldots,x_n)$ funkce n proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ totální diferenciál, pak i složená funkce

$$F(s_1,\ldots,s_k) = f\big(\varphi_1(s_1,\ldots,s_k),\ldots,\varphi_n(s_1,\ldots,s_k)\big)$$

má v bodě $\boldsymbol{s}$ totální diferenciál a pro její parciální derivace platí

(i) $$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_i}, \quad i = 1,\ldots,k.$$

(Hodnoty $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou vyčísleny v bodě $\boldsymbol{x}_0$.) Navíc totální diferenciál funkce F je

(ii) $$\mathrm{d}F(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] = \frac{\partial F}{\partial s_1}\,h_1 + \frac{\partial F}{\partial s_2}\,h_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial s_k}\,h_k,$$

kde $\boldsymbol{h} = (h_1,\ldots,h_k)$ a $\dfrac{\partial F}{\partial s_i}$ jsou vypočteny podle (i).

Poznámka 6.2. Přímé dosazení za $\dfrac{\partial F}{\partial s_i}$ z (i) do vztahu (ii) vede ke vzniku příliš nepřehledného výrazu. Proto se často užívá následujícího zjednodušeného označení. Do funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ dosazujeme za x_j funkce označené stejným symbolem

$$x_j = x_j(s_1, \dots, s_k).$$

Pak (i) můžeme stručně psát

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s_i}$$

pro $i = 1, \dots, k$. Výhodou tohoto vztahu je, že se snáze pamatuje. S využitím takto zapsaných parciálních derivací můžeme diferenciál složené funkce F napsat v úplném tvaru

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_1}\,\mathrm{d}s_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_k}\,\mathrm{d}s_k.$$

Máme na paměti, že $\mathrm{d}s_i$ označují diferenciály jednoduchých funkcí $s_i(\boldsymbol{h}) = h_i$, $i = 1, \dots, k$.

Před důkazem si uvedeme několik příkladů na použití Věty 6.1.

Příklad 6.3. Nechť $z = x^2 - y^2$, kde $x = s\,\cos t$ a $y = s\,\sin t$. Nalezněte obě $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ a diferenciál $\mathrm{d}z$.

Zde se jedná o složení dvou funkcí

$$f_1(s,t) = s\cos t, \quad f_2(s,t) = s\sin t$$

a funkce $z\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z(x,y) = x^2 - y^2$. Podle (i) z Věty 6.1 máme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial s}$$

Když se podržíme způsobu označení uvedeného v Poznámce 6.2, pak

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x\cos t - 2y\sin t.$$

Po dosazení za $x = f_1(s,t)$ a $y = f_2(s,t)$ dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2s\cos^2 t\ - 2s\sin^2 t\ = 2s\cos 2t.$$

Podobně vypočteme parciální derivaci podle t

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -2xs\sin t - 2ys\cos t \\ &= -2s^2\sin t\cos t - 2s^2\sin t\cos t = -2s^2\sin 2t.\end{aligned}$$

Diferenciál je pak zobrazení, jehož hodnota v bodě $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ je dána

$$\mathrm{d}z[\boldsymbol{h}] = \boldsymbol{h}\cdot \operatorname{grad} z\ = 2sh_1\cos 2t - 2s^2h_2\sin 2t. \tag{6.1}$$

Je možný ještě druhý způsob řešení. Nejprve vypočteme diferenciál $\mathrm{d}z$ vnější funkce $z = x^2 - y^2$ podle vzorce (5.12)

$$\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y.$$

Protože $x = s\cos t$ a $y = s\sin t$, můžeme dále vypočítat příslušné diferenciály $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}s - s\sin t\ \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = \sin t\ \mathrm{d}s + s\cos t\ \mathrm{d}t.$$

Ty dosadíme do předchozí rovnice a máme

$$\mathrm{d}z = 2x(\cos t\ \mathrm{d}s - s\sin t\ \mathrm{d}t) - 2y(\sin t\ \mathrm{d}s + s\cos t\ \mathrm{d}t).$$

Ještě vyjádříme x a y a upravíme tak, aby byly pohromadě výrazy obsahující $\mathrm{d}s$ a výrazy obsahující $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= (2s\cos^2 t - 2s\sin^2 t)\,\mathrm{d}s + (-2s^2\cos t\sin t - 2s^2\cos t\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2s\cos 2t\ \mathrm{d}s - 2s^2\sin 2t\ \mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}z[\boldsymbol{h}] = 2sh_1\cos 2t - 2s^2h_2\sin 2t,$$

což je to samé jako v (6.1).

Máme-li už diferenciál $\mathrm{d}z$, pak příslušné parciální derivace z něj rychle určíme. Podle (5.12) je $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial s}\,\mathrm{d}s + \dfrac{\partial z}{\partial t}\,\mathrm{d}t$. Srovnáním s (6.2) vidíme, že

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2s\cos 2t \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -2s^2\sin 2t.$$

Důkaz. (Věty 6.1) Důkaz bude spočívat ověření vlastnosti totálního diferenciálu pro výraz uvedený v bodě (ii), ve kterém místo parciálních derivací $\dfrac{\partial F}{\partial s_1}, \dfrac{\partial F}{\partial s_2}, \dots, \dfrac{\partial F}{\partial s_k}$ jsou dosazeny výrazy uvedené v bodě (i). V okamžiku, kdy toto budeme mít dokázáno, budeme také vědět, že koeficienty u $h_1, h_2, \dots, h_k$ ve výrazu pro takový totální diferenciál musí být rovny parciálním derivacím $\dfrac{\partial F}{\partial s_1}, \dfrac{\partial F}{\partial s_2}, \dots, \dfrac{\partial F}{\partial s_k}$. Tím dokážeme i rovnost v bodě (i).

Chceme tedy ukázat, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) - \mathrm{d}F(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{6.3}$$

(Zde užíváme opět stručné označení $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_k)$ a $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_k)$.) Jediné informace, které máme k dispozici jsou, že funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a funkce f mají totální diferenciál. Převeďme si tyto informace do matematického tvaru. Má-li funkce φ_j diferenciál v bodě $\boldsymbol{s}$, pak pro chybu aproximace

$$\omega_j(\boldsymbol{h}) = \varphi_j(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - \varphi_j(\boldsymbol{s}) - \mathrm{d}\varphi_j(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}]$$

platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\omega_j(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \quad j = 1, \dots, n. \tag{6.4}$$

Stejně tak i chyba aproximace $\omega(\boldsymbol{k}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{k}]$ funkce f splňuje, že

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to 0} \frac{\omega(\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{k}\|} = 0. \tag{6.5}$$

Začneme s úpravou rozdílu $F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s})$. Nejprve použijeme definici funkce F jako složení funkce f a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

$$F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})\big) - f\big(\varphi_1(\boldsymbol{s}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{s})\big).$$

Pomocí chyby aproximace můžeme přepsat všechna $\varphi_j(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})$ takto

$$\varphi_j(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) = \varphi_j(\boldsymbol{s}) + \mathrm{d}\varphi_j(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_j(\boldsymbol{h}).$$

Tím se poslední rozdíl změní na tvar

$$f\big(\varphi_1(\boldsymbol{s}) + \mathrm{d}\varphi_1(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_1(\boldsymbol{h}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{s}) + \mathrm{d}\varphi_n(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_n(\boldsymbol{h})\big) - f\big(\varphi_1(\boldsymbol{s}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{s})\big).$$

Protože se nám výrazy začínají komplikovat, vzpomeneme si, že $\boldsymbol{x}_0 = (\varphi_1(\boldsymbol{s}), \dots, \varphi_n(\boldsymbol{s}))$ a ještě si pro jednoduchost označíme vektor

$$\boldsymbol{k} = \Big(\mathrm{d}\varphi_1(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_1(\boldsymbol{h}), \dots, \mathrm{d}\varphi_n(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_n(\boldsymbol{h})\Big). \tag{6.6}$$

V tomto označení se nám počítaný rozdíl zredukuje na

$$F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Zbývá použít, že i f má totální diferenciál. Pak

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{k}] + \omega(\boldsymbol{k}).$$

Nyní zpětně dosadíme za $\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) &= f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{x}_0) \\
&= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{k}] + \omega(\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathrm{d}\varphi_1(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_1(\boldsymbol{h})\big) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\mathrm{d}\varphi_n(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_n(\boldsymbol{h})\big) + \omega(\boldsymbol{k}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\, h_1 + \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_k}\, h_k + \omega_1(\boldsymbol{h})\Big) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1}\, h_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_k}\, h_k + \omega_n(\boldsymbol{h})\Big) + \omega(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_i}\, h_i + \omega_j(\boldsymbol{h})\right) + \omega(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s_i}\, h_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \omega_j(\boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{k}).
\end{aligned}$$

Pro takto vyjádřený rozdíl teď ověříme, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial s_i}\, h_i\right) = 0.$$

Začněme tedy upravovat žádaný výraz:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(F(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{s}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial s_i}\, h_i\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_i}\, h_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\omega_j(\boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{k}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial s_i}\, h_i\right).
\end{aligned}$$

U první sumy prohodíme pořadí sčítání a přidáme k ní poslední sumu

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left(\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_i} - \frac{\partial F}{\partial s_i}\Big)\, h_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\omega_j(\boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{k})\right).$$

Výrazy v závorce v první sumě jsou nulové, neboť jsme na začátku řekli, že $\dfrac{\partial F}{\partial s_i}$ jsou ve výrazu pro diferenciál nahrazeny

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_i}.$$

U prostředního výrazu postupujeme takto

$$\begin{aligned}
\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\omega_j(\boldsymbol{h}) &= \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\omega_j(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\omega_j(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,
\end{aligned}$$

díky (6.4). A konečně poslední člen,

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{k}\|}\,\frac{\|\boldsymbol{k}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}. \tag{6.7}$$

Ze zavedení vektoru $\boldsymbol{k}$ v rovnosti (6.6) vidíme, že při $\boldsymbol{h} \to 0$ se rovněž vektor $\boldsymbol{k}$ blíží k nule. Podle (6.5) je

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\omega(\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{k}\|} = 0.$$

Aby byla nulová celá limita v (6.7) stačí, když je zbylý činitel omezený. To je ekvivalentní s tím, že složky vektoru $\boldsymbol{k}/\|\boldsymbol{h}\|$ jsou omezené. Podívejme se např. na první složku tohoto vektoru (pro ostatní je rozbor zcela analogický).

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{\|\boldsymbol{h}\|} &= \frac{\mathrm{d}\varphi_1(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}] + \omega_1(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &= \frac{\mathrm{d}\varphi_1(\boldsymbol{s})[\boldsymbol{h}]}{\|\boldsymbol{h}\|} + \frac{\omega_1(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &= \frac{\operatorname{grad}\varphi_1(\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} + \frac{\omega_1(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \\ &= \operatorname{grad}\varphi_1(\boldsymbol{s}) \cdot \frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} + \frac{\omega_1(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}.\end{aligned}$$

První člen je skalární součin gradientu s jednotkovým vektorem, což je zřejmě omezený výraz (v proměnné $\boldsymbol{h}$). Druhý člen je dokonce funkce mající nulovou limitu, specielně je omezená.

Tím jsme doplnili poslední chybějící argument a důkaz je uzavřen. □

Poznámka 6.4. Na vztahy (i) a (ii) z Věty 6.1 lze pohlížet také následovně. Jde o násobnou aplikaci rovnice (5.12) pro diferenciál: Když do $f(x_1, \dots, x_n)$ jsou za x_i dosazeny nové funkce

$$x_i = \varphi_i(s_1, \dots, s_k),$$

pak

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\big(\varphi_1, \dots, \varphi_n\big) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}\,\mathrm{d}s_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_n}\,\mathrm{d}s_n\Big) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(\frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1}\,\mathrm{d}s_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_k}\,\mathrm{d}s_k\Big).\end{aligned}$$

Dáme-li k sobě členy mající u sebe společný faktor $\mathrm{d}s_i$, dostaneme

$$\mathrm{d}f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_1}\right)\mathrm{d}s_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial s_k}\right)\mathrm{d}s_k.$$

Výrazy v kulatých závorkách jsou identické s výrazy z bodu (i) Věty 6.1.

Jak již bylo řečeno, Věta 6.1 zobecňuje pravidlo derivování složené funkce. Je užitečné se podívat, jak se v případě $k = n = 1$ redukují rovnosti (i). Za prvé, v tom případě máme jedinou funkci $\varphi(s)$, která závisí na jedné proměnné. I $f(x)$ je funkce jedné proměnné a $F(s) = f(\varphi(s))$. Za druhé, parciální derivace jsou obyčejné derivace. Vztah (i) pak vypadá takto

$$F'(s) = f'(\varphi(s))\,\varphi'(s),$$

což je známý vzorec pro derivaci složené funkce jedné proměnné.

Ukážeme si další speciální případ.

Důsledek 6.5. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Mějme n funkcí $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ diferencovatelných na (a, b). Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ má diferenciál. Pak*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\varphi_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\varphi_n'(t). \tag{6.8}$$

Ještě než dokážeme tento důsledek, podíváme se na jednu možnou interpretaci takového tvrzení. Obraz intervalu (a, b) při zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je křivka v n-rozměrném prostoru. Samo zobrazení φ popisuje pohyb bodu po této křivce, když interpretujeme $t \in (a, b)$ jako čas. Složky $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ určují souřadnice takového bodu v čase t. Funkci f můžeme chápat např. jako hodnotu potenciálu jistého silového pole. Hodnota složení $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ pak představuje velikost potenciálu v místě, kde se nachází náš bod v čase t. Velikost změny tohoto potenciálu, kterou pociťuje pohybující se částice, je derivace $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Suma na pravé straně rovnice (6.8) je skalární součin dvou vektorů

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\varphi_n'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \cdot (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v},$$

kde $\boldsymbol{v} = (\varphi_1'(t), \ldots, \varphi'(t))$ je vektor okamžité rychlosti pohybujícího se bodu.

Důkaz. Použitím Věty 6.1 pro $t = s_1 = \cdots = s_k$ ihned máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\varphi_n'(t).$$

□

Příklad 6.6. Pomocí Lagrangeovy rovnice pro hmotný bod odvodíme z homogenity času zákon zachování energie.

Homogenita času znamená, že všechny časové okamžiky jsou rovnocenné. Jinými slovy, z hlediska vyšetřovaného systému nemáme žádný důvod upřednostňovat jeden časový okamžik před ostatními. Z matematického hlediska to znamená, že Lagrangeova funkce $L = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ popisující systém nezávisí explicitně na čase t:

$$L = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}).$$

Zde $\boldsymbol{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ je (zatím neznámá) poloha hmotného bodu v čase t a tečka nad vektorem značí jako obvykle derivaci podle času. Z toho vyplývá, že funkce L vlastně závisí na šesti proměnných

$$L = L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3).$$

Lagrangeovy rovnice, které popisují pohyb hmotného bodu jsou tyto tři

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.9}$$

Z fyziky víme, že Lagrangeova funkce je rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2, x_3), \tag{6.10}$$

kde m je hmotnost daného bodu a U potenciální energie. S pomocí Důsledku 6.5 spočítáme nyní derivaci funkce L podle času t:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x_1}\,\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\,\dot{x}_2 + \frac{\partial L}{\partial x_3}\,\dot{x}_3 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\,\ddot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\,\ddot{x}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\,\ddot{x}_3.\end{aligned}$$

Za parciální derivace $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ dosadíme ze vztahů (6.9) a povšimneme si, že vzniklý výraz je derivací jistého součinu

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i\right] = \sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right).$$

Převedením na jednu stranu rovnice tak máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L\right) = 0.$$

To ovšem znamená, že výraz v závorce je konstantní, nezávislý na čase

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L = \text{konst.}$$

Dosadíme-li za L z (6.10), tak poslední rovnice bude mít tvar

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + U(x_1, x_2, x_3) = \text{konst},$$

což je zákon zachování energie.

Příklad 6.7. Nechť funkce $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ je dána vztahem $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Dále mějme tři funkce dané předpisy

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, \vartheta) &= \cos\varphi\,\sin\vartheta,\\ f_2(\varphi, \vartheta) &= \sin\varphi\,\sin\vartheta,\\ f_3(\varphi, \vartheta) &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

(Je to parametrický zápis jednotkové sféry.) Spočítejte parciální derivace složené funkce $g(f_1, f_2, f_3)$ podle obou proměnných φ i ϑ.

Jak funkce g tak funkce f_1, f_2, f_3 splňují předpoklady Věty 6.1. Proto podle bodu (i) této věty

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi}(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = -2x\sin\vartheta\sin\varphi + 2y\sin\vartheta\cos\varphi.$$

Zbývá dosadit za $x = \sin\vartheta\cos\varphi$ a $y = \sin\vartheta\sin\varphi$. Dostaneme tak

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}g(f_1, f_2, f_3) = -2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + 2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Podobně postupujeme i v druhém případě.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial \vartheta} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial \vartheta}\\ &= 2x\cos\vartheta\cos\varphi + 2y\cos\vartheta\sin\varphi - z\sin\vartheta)\\ &= 2\sin\vartheta\cos^2\varphi\cos\vartheta + 2\sin\vartheta\sin^2\varphi\cos\vartheta - 2\cos\vartheta\sin\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Složená funkce má obě parciální derivace nulové. Podle Věty 5.16 je konstantní. Přímým výpočtem se o tom můžeme rovněž přesvědčit: $g(f_1, f_2, f_3) = 1$.

2 Derivace vyšších řádů

Začneme s vyšetřováním vyšších derivací nejprve u funkcí. Po té se stručně zmíníme, jak to vypadá v obecnějším případě u zobrazení.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je daná funkce. Můžeme pro pevné $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ spočítat derivaci ve směru $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}$ ve všech bodech množiny G. Tím dostaneme novou funkci n proměnných $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$.

Příklad 6.8. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ má předpis $f(x,y) = y \sin xy$. Pro směr $\boldsymbol{h} = (-1,3)$ dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(x,y) &= \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f = (-1,3) \cdot (y^2 \cos xy, \sin xy + xy \cos xy) \\ &= -y^2 \cos xy + 3 \sin xy + 3xy \cos xy = 3 \sin xy + (3x-y) y \cos xy.\end{aligned}$$

Vraťme se k obecnému případu. Funkci $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ můžeme opět derivovat ať už v témže směru nebo v jakémkoli jiném. Rozhodneme-li se pro směr $\boldsymbol{k}$, získáme funkci

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}\Big)\colon G \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A tak bychom mohli postupovat k vyšším a vyšším derivacím.

Příklad 6.9. Využijeme funkci z předešlého příkladu, pro níž už víme, že

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}} = 3 \sin xy + (3x-y) y \cos xy.$$

Nechť $\boldsymbol{k} = (2,0)$. Pak

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}\Big) &= \boldsymbol{k} \cdot \operatorname{grad}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}\Big) = 2(3y \cos xy + 3y \cos xy - (3x-y) y^2 \sin xy) \\ &= 6y \cos xy - 2y^2 (3x-y) \sin xy.\end{aligned}$$

Zdaleka nejdůležitější jsou derivace ve směrech bázových vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, tj. parciální derivace. Pro vyšší parciální derivace budeme používat označení, které je jasné z následujících několika příkladů:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big)\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_2}}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ &\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_2}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_1}}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_2}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_3}}\Big)\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_2}}\Big(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e_3}}\Big(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e_3}}\Big)\Big) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} \text{ atd.}\end{aligned}$$

Derivace, ve kterých se derivování provádí podle různých proměnných se zcela přirozeně nazývají *smíšené*. Kromě prvních dvou jsou to všechny výše uvedené. Budou-li souřadné osy místo x, y, z označeny jinými symboly, třeba x_1, x_2, x_3, budou příslušné parciální derivace samozřejmě psané

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3^2}, \quad \text{atd.}$$

V tomto okamžiku je na místě jedno varování: nelze zaměňovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2!$$

První znamená *druhou* derivaci f podle x_1, zatímco druhý výraz je *první* derivace funkce f umocněná na druhou.

Po upozornění na to, co zaměňovat nelze, následuje upozornění na to, co zaměňovat lze. Za jistých celkem běžných předpokladů nezáleží na pořadí, ve kterém provádíme parciální derivování. Stručně zapsáno, ukážeme, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Věta 6.10. *Nechť $G \subset X$ je otevřená množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Je-li funkce $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ taková, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ jsou spojité v bodě $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$, pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $i = 1$ a $j = 2$. Pro jiné dvojice indexů je postup zcela stejný.

Ze spojitosti smíšených derivací v bodě $\boldsymbol{x}$ plyne, že první derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ existují na jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}$. Zvolíme si $\delta > 0$ dostatečně malé, aby první derivace existovaly na $U_\delta(\boldsymbol{x})$. Důkaz bude spočívat v úpravě výrazu

$$V = f(x_1+\delta, x_2+\delta, x_3, \dots) - f(x_1+\delta, x_2, x_3, \dots) - f(x_1, x_2+\delta, x_3, \dots) + f(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

dvěma různými způsoby. Abychom zjednodušili označení, užijeme, že $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ a $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Výraz V zapíšeme přehledněji

$$V = f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_1 + \delta \boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{x}).$$

První způsob úpravy je následující. Zavedeme funkci $\xi(t)$:

$$\xi(t) = f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_1 + t \boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + t \boldsymbol{e}_2).$$

Pak $V = \xi(\delta) - \xi(0)$. Podle věty o střední hodnotě (pro funkci jedné proměnné) existuje $\vartheta \in (0, \delta)$, že

$$\begin{aligned} V = x'(\vartheta)\,\delta &= \delta \frac{\partial}{\partial x_2}\big(f(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_1 + \vartheta \boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{e}_2)\big) \\ &= \delta\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{e}_1 + \vartheta \boldsymbol{e}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{e}_2)\Big). \end{aligned}$$

V závorce je opět rozdíl funkčních hodnot, tentokráte funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ v bodech lišících se o $\delta \boldsymbol{e}_2$. Použijeme ještě jednou větu o střední hodnotě, nyní ale (5.2) z Věty 5.7 a dostaneme

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\boldsymbol{x} + \eta \boldsymbol{e}_1 + \vartheta \boldsymbol{e}_2) \tag{6.11}$$

pro nějaké $\eta \in (0, \delta)$.

Druhý způsob úpravy výrazu V spočívá v tom, že prohodíme role $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ a položíme

$$\zeta(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_1 + \delta\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_1).$$

Pak $V = \zeta(\delta) - \zeta(0)$. Zcela stejně jako výše použijeme dvakrát věty o střední hodnotě, abychom dostali pro jisté $\widetilde{\eta}, \widetilde{\vartheta} \in (0, \delta)$

$$V = \delta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} f(\boldsymbol{x} + \widetilde{\eta}\boldsymbol{e}_1 + \widetilde{\vartheta}\boldsymbol{e}_2). \tag{6.12}$$

Rovnosti (6.11) a (6.12) spolu dávají

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} f(\boldsymbol{x} + \eta\boldsymbol{e}_1 + \vartheta\boldsymbol{e}_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} f(\boldsymbol{x} + \widetilde{\eta}\boldsymbol{e}_1 + \widetilde{\vartheta}\boldsymbol{e}_2)$$

To je téměř výsledek, který očekáváme. Vadí nám pouze to, že bychom chtěli mít tuto rovnost ve stejném bodě $\boldsymbol{x}$ na obou stranách rovnice. Avšak parametry $\vartheta, \eta, \widetilde{\vartheta}, \widetilde{\eta} \in (0, \delta)$. Aplikujeme-li na obě strany limitu pro $\delta \to 0$, z předpokladu spojitosti těchto smíšených derivací plyne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}).$$

□

Pro klid mysli si otestujeme právě dosažený výsledek na nějakém příkladě.

Příklad 6.11. Ověříme, že druhé smíšené derivace se sobě rovnají např. pro funkci $f(x, y) = y \sin xy$. Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial (y \sin xy)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin xy + xy \cos xy) \\ &= y \cos xy + y \cos xy + xy^2 \sin xy = 2y \cos xy + xy^2 \sin xy. \end{aligned}$$

V obráceném pořadí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial (y \sin xy)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos xy) = 2y \cos xy + xy^2 \sin xy.$$

Po tomto příkladu musí nutně následovat příklad, který ukazuje, že předpoklad spojitosti $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ve Větě 6.10 je naopak podstatný. Bez něj by tvrzení nemuselo platit.

Příklad 6.12. Vypočtěte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ v bodě $(x, y) = (0, 0)$ pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ nebo } y = 0. \end{cases}$$

Protože funkce f je definována dvěma vzorci, musíme derivaci počítat z definice.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}. \tag{6.13}$$

Potřebujeme tedy znát parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Hodnota $f(0,t) = 0$, a tudíž

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,t) - f(0,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{arctg} \frac{t}{h} - t^2 \operatorname{arctg} \frac{h}{t}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h \operatorname{arctg} \frac{t}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{t^2 \operatorname{arctg} \frac{h}{t}}{h} = -t.
\end{aligned}$$

Hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ je jednoduchá,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Dosazením do (6.13) získáme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{-t - 0}{t} = -1.$$

Podobně budeme počítat i hodnotu smíšené derivace s opačným pořadím proměnných.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}. \tag{6.14}$$

Parciální derivace podle y v potřebných bodech se vypočtou jako výše

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t,h) - f(t,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^2 \operatorname{arctg} \frac{h}{t} - h^2 \operatorname{arctg} \frac{t}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{t^2 \operatorname{arctg} \frac{h}{t}}{h} - \lim_{h\to 0} h \operatorname{arctg} \frac{t}{h} = t
\end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Opět dosadíme do (6.14) a máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t - 0}{t} = 1.$$

Pro zadanou funkci nastalo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Příčina nerovnosti v předchozím příkladu spočívá v tom, že smíšené derivace nejsou spojité v $(0,0)$. Můžeme se přesvědčit tím, že vypočteme, jak vypadají druhé smíšené derivace v bodech $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y\right) = \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

V obráceném pořadí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x - 2y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$ sice platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, ale limita v $(0,0)$ těchto funkcí neexistuje.

Definice 6.13. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Funkce $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazve* **třídy C^k na množině** *G (nebo krátce C^k-funkce), jestliže všechny parciální derivace řádu k jsou spojité na G.*

Např. funkce třídy C^1 je taková, že všechny parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

jsou opět spojité funkce. Pro C^2-funkci požadujeme, aby byly spojité všechny derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},\ i = 1, \dots, n \text{ a } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i \neq j,\ i, j = 1, \dots, n.$$

Z tohoto požadavku mimo jiné vyplývá, že f má spojité i všechny první parciální derivace. Speciálně, C^2-funkce je také C^1-funkce. Obecně platí, že funkce třídy C^k je funkcí třídy C^l pro každé $l \leq k$.

O něco komplikovanější než derivace vyššího řádu jsou vyšší diferenciály. Pro naše účely si naštěstí vystačíme s nanejvýš druhým diferenciálem. Ale i ten nebude úplně jednoduchý na prozkoumání. Neobejdeme se bez pojmu bilineární forma.

Definice 6.14. *Nechť X je euklidovský prostor. Zobrazení $\psi\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá* **bilineární forma** *na X, jestliže platí*

$$\begin{aligned}\psi(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1) &= s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1),\\ \psi(\boldsymbol{h}_1, s\boldsymbol{k}_1 + t\boldsymbol{k}_2) &= s\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_1) + t\psi(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{k}_2)\end{aligned}$$

pro každé $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in X$ a $s, t \in \mathbb{R}$.

Podmínky v definici lze jednoduše vyjádřit slovy tak, že ψ je bilineární forma, je-li lineární v obou proměnných. Nejběžnější bilineární forma je skalární součin, $\psi(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{k}$. Snadno vidíme, že např.

$$(s\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_2) \cdot \boldsymbol{k} = s(\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{k}) + t(\boldsymbol{h}_2 \cdot \boldsymbol{k}).$$

Každá bilineární forma na euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ má tvar

$$\psi(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{h}\cdot(\mathbf{A}\boldsymbol{k}) = (h_1,h_2,\ldots,h_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n\end{pmatrix},$$

pro nějakou čtvercovou matici $\mathbf{A}$. Tato matice jednoznačně určuje bilineární formu ψ a její prvky se zjistí, použijeme-li ve výše uvedeném vztahu specielní volbu $\boldsymbol{h} = \mathbf{e}_i$ a $\boldsymbol{k} = \mathbf{e}_j$:

$$a_{ij} = \psi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

A nyní přistoupíme k definici druhého diferenciálu.

Definice 6.15. *Nechť $G \subset X$ je otevřená podmnožina euklidovského prostoru X, $\boldsymbol{x} \in G$ a $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$.* **Druhý (totální) diferenciál** $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ je bilineární forma $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$ splňující*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}] - \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}]}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0 \quad \textit{pro každé } \boldsymbol{k} \in X. \tag{6.15}$$

Tato definice není tak nepřirozená, jak by se na první pohled zdálo. Jestliže diferenciál přibližně nahrazoval rozdíl funkčních hodnot $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a $f(\boldsymbol{x})$, tak druhý diferenciál aproximuje rozdíl prvních diferenciálů $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ a $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$. V této logické linii jsou definovány i všechny další vyšší diferenciály.

Druhý diferenciál nemusí vždy existovat. Je-li funkce třídy C^2 na G, pak má v každém bodě z G druhý diferenciál. Toto tvrzení zde nebudeme dokazovat. Zájemci si jej mohou najít v [3]. Obecně platí, že funkce třídy C^k mají k-tý diferenciál. (Případ $k = 1$ jsme si dokázali v Kapitole 5, Věta 5.14). Zůstává otázka, jak $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$ vypočítat pro danou konkrétní C^2-funkci f a bod $\boldsymbol{x}$. Musíme se podívat zpět na definici. Přepíšeme si ji v trochu jiném označení. Nechť $\boldsymbol{k} \in X = \mathbb{R}^n$ je pevné. Zavedeme pomocnou funkci $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ následovně:

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}].$$

Funkce p nám dává v každém bodě $\boldsymbol{x}$ hodnotu diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ v pevném směru $\boldsymbol{k}$. V tomto označení je podmínka (6.15) přesně požadavek na existenci diferenciálu $\mathrm{d}p(\boldsymbol{x})$. Jinými slovy, druhý diferenciál funkce f je první diferenciál funkce p:

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = \mathrm{d}p(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}] = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}])[\boldsymbol{h}]. \tag{6.16}$$

Z tohoto vztahu kromě dalšího plyne, proč jsme zvolili za označení druhého diferenciálu symbol d^2. Jde o dvojnásobné použití operace d „utvořit diferenciál". Navíc, a o to nám hlavně šlo, můžeme z (6.16) odvodit způsob výpočtu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$. Užijeme vztah (5.10) z Tvrzení 5.11:

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k}])[\boldsymbol{h}] = \mathrm{d}(\boldsymbol{k}\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}))[\boldsymbol{h}] = \boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}(\boldsymbol{k}\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})). \tag{6.17}$$

Při volbě $\boldsymbol{h} = \mathbf{e}_i$ a $\boldsymbol{k} = \mathbf{e}_j$ zjistíme, že prvky matice $\mathbf{A}$ určující bilineární formu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$ jsou

$$a_{ij} = \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{e}_i\cdot\operatorname{grad}(\boldsymbol{e}_j\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Tato matice se nazývá *Hessova matice* nebo krátce *hessián* funkce f. Budeme ji značit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Vypočítat druhý diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ znamená zjistit hessián v bodě $\boldsymbol{x}$. Důležitost druhého diferenciálu objevíme v Kapitole 7 při vyšetřování extrémů funkce více proměnných.

Pro ilustraci uveďme příklad.

Příklad 6.16. Zjistěte $\mathrm{d}^2 f$ v bodě $(1, -1)$ pro funkci $f(x, y) = x^2 y + 3y^2$.

Druhý diferenciál je reprezentovám hessiánem, takže musíme vypočítat složky matice

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

v bodě $(1, -1)$. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6y) = 6, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 6y) = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{H}(1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Známe-li $\mathbf{H}(1, -1)$, pak příslušná bilineární forma tvořící druhý diferenciál je

$$\mathrm{d}^2 f(1, -1)[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}] = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = -2h_1k_1 + 2h_1k_2 + 2h_2k_1 + 6h_2k_2,$$

kde opět $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ a $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$.

Příklad 6.17. Spočtěte druhé diferenciály funkcí představujících složky bodu (x, y) v polárních souřadnicích,

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi.$$

Musíme vypočítat d^2x a d^2y, kde $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$. V prvním případě je hessián

$$\mathbf{H}_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial\varrho^2} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial\varrho\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\varrho} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\varrho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tím

$$\mathrm{d}^2x[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = -(h_1k_2 + h_2k_1)\sin\varphi - h_2k_2\varrho\cos\varphi.$$

A stejným způsobem zjistíme i hessián $\mathbf{H}_y$:

$$\mathbf{H}_y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial\varrho^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial\varrho\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\varrho} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \end{pmatrix},$$

A tedy

$$\mathrm{d}^2y[\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}] = (h_1k_2 + h_2k_1)\cos\varphi - h_2k_2\varrho\sin\varphi.$$

3 Taylorův polynom více proměnných

Důvod, který obecně motivuje zavedení Taylorova polynomu, je tento: z lokálního chování funkce v daném bodě usoudit na chování globální. Jinými slovy to znamená, jak je možné ze znalosti hodnoty funkce a jejích derivací v bodě $\boldsymbol{x}$ (lokální chování) říci něco o hodnotách funkce v dalších bodech (globální chování). Uvidíme, že řešení této otázky ve více proměnných se velmi přirozeně redukuje na případ Taylorova polynomu v jedné proměnné.

Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je daný bod v euklidovském prostoru a nechť $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový směr. Dále mějme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, o které předpokládáme, že je třídy C^{m+1}. Označíme

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkce φ je funkce jedné proměnné a náš úkol zní aproximovat $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \varphi(1)$ pomocí $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(0)$ a jejích derivací. Pro φ máme Taylorův rozvoj

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \varphi''(0)\frac{1}{2!} + \cdots + \varphi^{(m)}(0)\frac{1}{m!} + R_m, \tag{6.18}$$

kde R_m je jeden z možných tvarů zbytku, např.

$$R_m = \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}, \quad \vartheta \in (0,1).$$

Vyjádříme nyní derivace $\varphi^{(i)}(0)$, $i = 1,\dots,m$ pomocí f. Funkce φ vznikla jako restrikce původní f na přímku procházející bodem $\boldsymbol{x}$ a mající směr $\boldsymbol{h}$. Z předchozích kapitol známe význam její derivace, $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})$. Z tohoto mimo jiné plyne, že budeme-li opět derivovat funkci $\varphi'(t)$, dostaneme

$$\varphi''(t) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{h}^2}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}).$$

A obecně i-tá derivace funkce φ je i-tá derivace funkce f ve směru $\boldsymbol{h}$

$$\varphi^{(i)}(t) = \frac{\partial^i f}{\partial \boldsymbol{h}^i}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.19}$$

V bodě $t = 0$ tak máme

$$\varphi^{(i)}(0) = \frac{\partial^i f}{\partial \boldsymbol{h}^i}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Pro tvar zbytku dostaneme pomocí (6.19)

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1} f}{\partial \boldsymbol{h}^{m+1}}(\boldsymbol{x} + \vartheta\boldsymbol{h})$$

pro jisté $\vartheta \in (0, 1)$. Dosazením tohoto vyjádření derivací a zbytku do (6.18) získáme následující vztah

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{h}^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m f}{\partial \boldsymbol{h}^m}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1} f}{\partial \boldsymbol{h}^{m+1}}(\boldsymbol{x} + \vartheta\boldsymbol{h}). \tag{6.20}$$

Pro derivaci ve směru jsme odvodili důležitý vzorec (5.10)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{6.21}$$

Na tuto rovnici se budeme dívat v *operátorové interpretaci.* Symbol $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}$ označuje pravidlo, které každé funkci f přiřadí novou funkci $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}$:

$$f \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}.$$

Zobrazení mezi množinami funkcí se nazývají *operátory.* Operátor působí na danou funkci tak, že ji pozmění a vytvoří funkci novou. Derivace v pevném směru $\boldsymbol{h}$ představuje takový operátor. V této symbolice rovnost (6.21) znamená, že operátor $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}$ je lineární kombinací oprátorů $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Zde se nabízí definovat operátor $\operatorname{grad} := \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, který působí na funkci f tak, že ji přiřadí vektor $\operatorname{grad} f$. Můžeme tak psát

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}} = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad}) f = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Dále, dvojnásobné použití operátoru $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}$ dává

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{h}^2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})f = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})f = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 f.$$

Např. v případě dvou proměnných je

$$(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 f = \Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2 f = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Obecně je operátor k-té derivace ve směru $\boldsymbol{h}$ roven

$$\frac{\partial^k}{\partial \boldsymbol{h}^k} = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^k = \Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^k.$$

Pokud bychom chtěli tuto k-tou mocninu vypsat, dostaneme poněkud hrozivě vypadající sumu

$$\Big(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^k = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} h_1^{k_1} \cdots h_n^{k_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

Vrátíme se proto raději k původnímu označení $\dfrac{\partial^k}{\partial \boldsymbol{h}^k} = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^k$. V něm jsme vlastně dokázali následující větu.

Věta 6.18. *(o Taylorově polynomu) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a nechť f je funkce třídy C^{m+1} na množině G. Pak pro $\boldsymbol{x} \in G$ a pro směr $\boldsymbol{h} \in X$ takový, že úsečka s konci $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}$ leží v G, existuje $\vartheta \in (0,1)$, že platí*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})f(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2}{2!} f(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^m}{m!} f(\boldsymbol{x}) + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^{m+1}}{(m+1)!} f(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{h}). \tag{6.22}$$

Poznámka 6.19. (i) Věta 6.18 zobecňuje Taylorovu větu pro funkce jedné proměnné, neboť ji zahrnuje jako speciální případ. Je-li $n = 1$, pak máme pouze jediný směr, ve kterém lze počítat derivace, a to je $\boldsymbol{h} = 1$, ($\boldsymbol{h}$ je jednotkový vektor v jednorozměrném prostoru, a proto má jen jednu složku).

$$(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^i = \left(1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i = \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}.$$

Rovnost (6.22) pak ihned dává Taylorovu větu v jedné proměnné.

(ii) Pro $m = 0$ se rovnice (6.22) redukuje na

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})f(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{h}).$$

Jinak zapsáno

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{h}).$$

Toto je vícerozměrná analogie Lagrangeovy věty o střední hodnotě, se kterou jsme se už jednou setkali, viz Větu 5.7.

(iii) Podíváme se na případ funkce dvou proměnných a rozepíšeme si členy do třetího řádu.

$$\begin{aligned}
f(x_1+h_1,x_2+h_2) = f(x_1,x_2) &+ \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)f(x_1,x_2)+\\
&+\frac{1}{2!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f(x_1,x_2)+\\
&+\frac{1}{3!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^3 f(x_1,x_2)+\cdots\\
= f(x_1,x_2) &+ h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)+\\
&+\frac{1}{2!}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\right)+\\
&+\frac{1}{3!}\left(h_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_1,x_2)+3h_1^2h_2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}(x_1,x_2)+\right.\\
&\qquad\left.+3h_1h_2^2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^2}(x_1,x_2)+h_2^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_1,x_2)\right)+\dots
\end{aligned}$$

Z tohoto příkladu je jasně vidět, že bez pomoci operátorové symboliky bychom stěží mohli rozumně vyjádřit obecný tvar Taylorova polynomu, natož provézt alespoň trochu přehledné odvození. Vždyť už v nejjednodušším vícerozměrném případě dvou proměnných se vyjádření vyšších derivací rozrůstá k dokonalé nepřehlednosti.

(iv) Někdy se Taylorův polynom vyjadřuje místo v přírůstku $\boldsymbol{h}$ v rozdílu $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ odpovídajících bodů. Tento tvar získáme jednoduše, když do (6.22) dosadíme za $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) &+ \frac{\big((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\operatorname{grad}\big)^2}{2!}f(\boldsymbol{x})+\dots\\
&+\frac{\big((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\operatorname{grad}\big)^m}{m!}f(\boldsymbol{x})+\frac{\big((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\operatorname{grad}\big)^{m+1}}{(m+1)!}f(\boldsymbol{x}+\vartheta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})).
\end{aligned}$$

4 Transformace diferenciálních výrazů

Pod tímto názvem rozumíme zavedení nových proměnných nebo i funkcí do výrazů obsahujících derivace. Toho se využívá zejména při řešení složitějších diferenciálních rovnic ať už obyčejných nebo parciálních.

Začneme jednoduchým příkladem. Máme parciální diferenciální rovnici

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{6.23}$$

Nahradíme proměnné x a y novými s a t podle vztahů

$$x=\sin s,\quad y=t. \tag{6.24}$$

(Otázku proč zrovna tímto způsobem a ne jiným ponecháme stranou. Nás hlavně zajímá postup, jak tyto nové proměnné do rovnice zavést). Funkce f se stala závislou na s a t prostřednictvím x a y. Můžeme vyjádřit její parciální derivace podle s a t pomocí vzorce pro derivaci složené funkce, viz Větu 6.1,(i):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos s + \frac{\partial f}{\partial y}0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cos s,\\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}0 + \frac{\partial f}{\partial y}1 = \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

Tím máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos s}\frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{6.25}$$

Druhá z rovnic není překvapením, neboť proměnná y je pouze přejmenována na t. Abychom získali vyjádření pro smíšenou derivaci podle x a y, zderivujeme první z rovnic v (6.25) podle y (což je to samé jako podle t):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\cos s}\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{1}{\cos s}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}.$$

Nyní máme všechny výrazy v (6.23) vyjádřeny přes s a t. Dosazením dostaneme

$$\sqrt{1-\sin^2 s}\,\frac{1}{\cos s}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

I když není účelem tohoto textu řešit parciální diferenciální rovnice, jako ukázku si tu poslední vyřešíme. Můžeme ji totiž přepsat do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s} + f\right) = 0.$$

To znamená, že výraz v závorce nezávisí na proměnné t. Je tedy čistě funkcí s, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial s} + f = \varphi(s),$$

pro libovolnou diferencovatelnou funkci φ. Tato rovnice je v proměnné s lineární rovnice 1. řádu. Její řešení známe

$$f = e^{-s}\Big(C_1(t) + \int \varphi(s)\, e^s \,\mathrm{d}s\Big) = C_1(t)e^{-s} + C_2(s),$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné funkce třídy C^2. Vrátíme-li se k původním proměnným, máme obecné řešení rovnice (6.23)

$$f(x,y) = C_1(y)\, e^{-\arcsin x} + C_2(\arcsin x).$$

Poučení, které můžeme z výše uvedeného příkladu získat, je následující. Nechť jsou nové proměnné s, t zavedeny pomocí vztahů

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t). \tag{6.26}$$

Sestavíme následující soustavu

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Derivace $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ vypočteme z (6.26). Dostaneme tak soustavu dvou rovnic pro neznámé hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Jejím vyřešením získáme hledané vyjádření parciálních derivací podle x a y pomocí derivací podle s a t.

Zvládneme-li tento základní krok, jeho opakováním můžeme vyjadřovat derivace vyšších řádů. Když bude proměnných více než dvě, tj. místo vztahů (6.26) budeme mít např.

$$x = x(s,t,u), \quad y = y(s,t,u), \quad z = z(s,t,u).$$

povede náš postup k řešení soustavy tří rovnic pro tři neznámé $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ apod.

5 Cvičení

Úloha: Nalezněte diferenciál funkce $z = f(x^2y, x^y)$.

Řešení: Danou funkci si představíme ve tvaru $z = f(u,v)$, kde $u = x^2y$ a $v = x^y$. Podle Věty 6.1,(ii) nebo podle vzorce (5.12) máme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\partial f}{\partial u}(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y) + \frac{\partial f}{\partial v}(yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y\ln x\mathrm{d}y) \\ &= \Big(2xy\frac{\partial f}{\partial u} + yx^{y-1}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\mathrm{d}x + \Big(x^2\frac{\partial f}{\partial u} + x^y\ln x\frac{\partial f}{\partial v}\Big)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Úloha: Nechť funkce $g_1, g_2\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ májí předpis $g_1(x,y) = xy$ a $g_2(x,y_) = x^2 + y^2$. Spočtěte diferenciály funkcí g_1 a g_2 vyjádřených v polárních souřadnicích,

$$x = \varrho\cos\varphi,\ y = \varrho\sin\varphi,$$

v bodě $\varrho = 1$ a $\varphi = \pi/2$.

Řešení: Jako v předešlé úloze máme, že diferenciál $\mathrm{d}g_1$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g_1}{\partial y}\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\ &= \varrho\sin\varphi(\cos\varphi\mathrm{d}\varrho - \varrho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi) + \varrho\cos\varphi(\sin\varphi\mathrm{d}\varrho + \varrho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi). \end{aligned}$$

V bodě $\varrho = 1$ a $\varphi = \pi/2$ máme $\mathrm{d}g_1 = -\mathrm{d}\varphi$.

Podobně pro g_2:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g_2 &= \frac{\partial g_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y \\ &= 2\varrho\cos\varphi(\cos\varphi\mathrm{d}\varrho - \varrho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi) + 2\varrho\sin\varphi(\sin\varphi\mathrm{d}\varrho + \varrho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi). \end{aligned}$$

Pro hodnotu $\varrho = 1$ a $\varphi = \pi/2$ je $\mathrm{d}g_2 = 2\mathrm{d}\varrho$.

Úloha: Převeďte Laplaceův operátor Δ ve dvou proměnných do polárních souřadnic.

Řešení: Tato úloha je poněkud pracnější, nicméně důležitá. Laplaceův operátor ve dvou proměnných je definován

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Polární souřadnice mají transformační vztahy

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi.$$

Podle metody popsané v části 4 sestavíme soustavu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \varrho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho} \qquad \text{tj.} \qquad & \frac{\partial f}{\partial \varrho} &= \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} \qquad \text{tj.} \qquad & \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -\varrho \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \varrho\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočteme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ například takto. První rovnici vynásobíme $\varrho \sin\varphi$, druhou $\cos\varphi$ a obě sečteme. Dostaneme

$$\varrho \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \varrho \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}. \tag{6.27}$$

Analogicky, po vynásobení první rovnice $\varrho\cos\varphi$ a druhé $-\sin\varphi$, získáme z jejich součtu vyjádření

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}. \tag{6.28}$$

Rovnice (6.27) zároveň ukazuje, jak vyjádřit derivování podle y pomocí derivací podle ϱ a φ. Abychom dostali druhou derivaci, použijeme toto pravidlo na $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin\varphi\left(\sin\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} - \frac{\cos\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho \partial \varphi}\right) \\
&\quad + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\left(\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \sin\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \sin^2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho \partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.
\end{aligned}$$

Pro druhou derivaci podle x postupujeme stejně s rovnicí (6.28),(nyní už stručněji):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) \\ &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial f}{\partial\varphi} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial^2 f}{\partial\varrho\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\varrho} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

Sečtením a úpravou dostaneme výsledek

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Úloha: Napište diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$$

v polárních souřadnicích.

Řešení: Tato úloha je poněkud odlišná. Doposud jsme zaměňovali pouze nezávisle proměnné, zatímco zde měníme i samotnou funkci. Transformovaná rovnice bude rovnicí pro novou funkci $\varrho = \varrho(\varphi)$ nebo pro $\varphi = \varphi(\varrho)$; to záleží na naší volbě. Z důvodu názornějšího ilustrování provedeme zde obě možnosti.

Uvažujme nejprve, že ϱ je funkcí φ, $\varrho = \varrho(\varphi)$. Pak z rovnic

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi$$

plyne, že x a y jsou funkcemi φ. Můžeme proto psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Tím

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi + \varrho\cos\varphi}{\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi - \varrho\sin\varphi}.$$

Dosadíme tento výraz do původní rovnice,

$$\frac{\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi + \varrho\cos\varphi}{\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi - \varrho\sin\varphi} = \frac{\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi}{\varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi}.$$

Úpravou dostaneme konečný tvar

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi} = \varrho.$$

Když budeme nyní předpokládat, že φ je funkcí ϱ, $\varphi = \varphi(\varrho)$, můžeme pokládat x a y za funkce proměnné ϱ. Pak

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varrho}.$$

Takže

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varrho}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varrho}} = \frac{\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}}{\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}}.$$

Dosazením do původní rovnice a úpravou získáme výsledný tvar

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{1}{\varrho}.$$

Z uvedených příkladů je vidět, že se i poměrně složitá úloha někdy nechá vhodnou přeformulací převést na jednoduchou.

1. Nechť $z = x^2 + xy + y^2$ a $x = \sin t$, $y = \cos t$. Spočtěte $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
2. Nechť $g(t,u,v) = \cos(2t + 4u^2 - v)$ a $u = \dfrac{1}{t}$, $v = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$. Spočtěte $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$.
3. Nechť $z = e^{xy}\ln(x+y)$ a $x = s^3$, $y = 1 - s^3$. Spočtěte $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$.
4. Spočtěte parciální derivace následujících složených funkcí

   a) $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{x+y} g(t)\,\mathrm{d}t$, b) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{y} g(t)\,\mathrm{d}t$,

   c) $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{xy} g(t)\,\mathrm{d}t$, d) $f(x,y) = g\Big(g(x,y), g(x,y)\Big)$

   e) $f(x,y) = g\Big(x, p(x), q(x,y)\Big)$, f) $u(x,y,z) = g(x^y, y^z, z^x)$.
5. Vypočtěte diferenciály následujících funkcí.

   a) $z = z(x,y)$, kde $x = u\sin v$, $y = u^2$,
   b) $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$,
   c) $u = h(\xi,\eta,\zeta)$, kde $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$ a $\zeta = 2xy$,
   d) $u = f(x+y, z)$,
   e) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.
6. Převeďte výraz $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ do polárních souřadnic.
7. Následující diferenciální rovnice přepište pomocí uvedených transformací:

   a) $(1+x)y' = x^2 - x + y + \dfrac{y}{x}$, kde $x = s + t$, $y = s^2 - t^2$, $s = s(t)$,

b) $(1+x)y' = y + \dfrac{(x+1)^2}{4y}$, kde $x = 2s-1$, $y = st$, $s = s(t)$,

c) $(1+xy)y' = \dfrac{y(1-y)}{1+x}$, kde $x = \dfrac{t}{s}$, $y = t+s$, $s = s(t)$,

d) $\dfrac{1-x^2}{y}\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, kde $x = \dfrac{t}{s}$, $y = t+s$

e) $x\left(1 - \dfrac{x}{1+xy}\right)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{x}(1+y+xy^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, kde $x = \dfrac{t+1}{s}$, $y = \dfrac{ts}{t+1}$,

f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{2y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(x^2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, kde $x = s+t$, $y = s^2 - t^2$,

g) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, kde $x = tu$, $y = uv$, $z = tv$, $v = v(t,u)$,

h) $\dfrac{4y''}{2-y} + 2y' + 2(2-y)(y-x) - 1 = 0$, kde $x = 2t+u$, $y = 2t+2u$, $u = u(t)$,

i) $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$, kde $x = st$, $y = t$, $z = \dfrac{u+t}{st}$, $u = u(s,t)$,

j) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = z$, kde $x = s+t$, $y = s-t$, $z = ue^{t-s}$, $(u = u(t,s))$,

8. Ukažte, že rovnice
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$
nezmění tvar při jakémkoli prohození rolí mezi x, y a z.

9. Převeďte do sférických souřadnic

a) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, (početně pracnější).

10. Ukažte, že záměnost parciálních derivací je ekvivalentní se záměností derivací ve dvou různých směrech.

Výsledky.

1. $\cos 2t$; **2.** $-\sin(2t + \dfrac{4}{t^2} - \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t})(2 - \dfrac{8}{t^3} - \dfrac{\ln t - 2}{2\sqrt{t}\ln^2 t})$; **3.** 0; **4.** a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = g(x+y)$, b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$, c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yg(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xg(xy)$, d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x}(g,g)\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(g,g)\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}(g,g)\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(g,g)\dfrac{\partial g}{\partial y}$, e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial q}{\partial y}$, f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x}yx^{y-1} + \dfrac{\partial g}{\partial z}z^x \ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}x^y \ln x + \dfrac{\partial g}{\partial y}zy^{z-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial y}y^z \ln y + \dfrac{\partial g}{\partial z}xz^{x-1}$; **5.** a) $\mathrm{d}z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin v + \dfrac{\partial z}{\partial y}2u\right)\mathrm{d}u + \dfrac{\partial z}{\partial x}u\cos v\mathrm{d}v$, b) $\mathrm{d}u = \left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial v}2x\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial v}2y\right)\mathrm{d}y +$

$\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}2z\Big)\mathrm{d}z$, c) $\mathrm{d}u=\Big(2x\frac{\partial h}{\partial \xi}+2x\frac{\partial h}{\partial \eta}+2y\frac{\partial h}{\partial \zeta}\Big)\mathrm{d}x+\Big(2y\frac{\partial h}{\partial \xi}-2y\frac{\partial h}{\partial \eta}+2x\frac{\partial h}{\partial \zeta}\Big)\mathrm{d}y$, d) $\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}z$, e) $\mathrm{d}u=\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}x+\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial f}{\partial u}\Big)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}z$; **6.** $\Big(\frac{\partial f}{\partial \varrho})^2+\frac{1}{\varrho^2}(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big)^2$; **7.** a) $\dot{s}=s+t$, b) $\dot{s}=st$, c) $\dot{s}+s+t=0$, d) $\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}=0$, e) $\frac{\partial f}{\partial s}+(1+t)\frac{\partial f}{\partial t}=0$, f) $\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}=0$, g) $\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u}=0$, h) $\ddot{u}+\dot{u}+u=0$, i) $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$, j) $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}=2u$; **9.** a) $\Big(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\Big)^2+\frac{1}{\varrho^2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\Big)^2+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\vartheta}\Big(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big)^2$, b) $\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varrho}\Big(\varrho^2\frac{\partial f}{\partial \varrho}\Big)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.

Kapitola 7

Extrémy funkcí více proměnných

Celá tato kapitola se zabývá pouze jedinou otázkou: jakým způsobem zjistit bod či body, ve kterých daná funkce nabývá extrém. Z Kapitoly 4 už víme, že každá spojitá funkce na uzavřené omezené množině nabývá svého minima i maxima. Příslušná věta ale nedává ani sebemenší návod, jak body, ve kterých se toto odehrává, nalézt.

Začneme nejdříve s tzv. lokálními extrémy.

1 Lokální extrémy

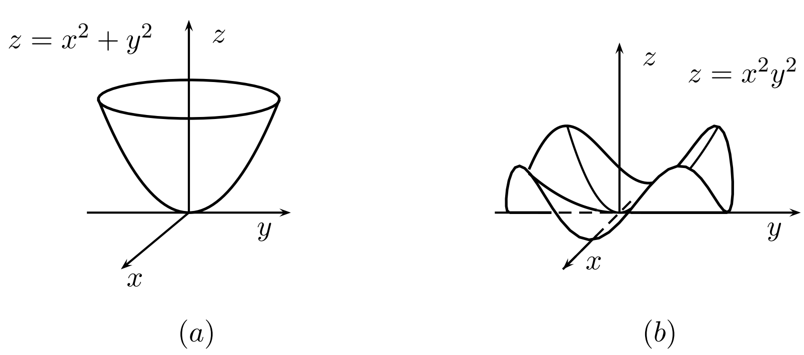
Následující definice přesně vymezuje pojem, který se pokusíme v této části studovat.

Definice 7.1. *Nechť $\mathbb{R}^n$ je euklidovský prostor a $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$* **lokální minimum** *(resp.* **maximum***), jestliže existuje okolí U bodu $\boldsymbol{x}$, že*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y}) \quad (\textit{resp. } f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y})\ )$$

pro všechna $\boldsymbol{y} \in U$. Bude-li dokonce $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{y})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{y})$) pro všechny body $y \in U \setminus \{\boldsymbol{x}\}$, mluvíme o ostrém lokálním minimu (resp. maximu).

Nabývá-li f v $\boldsymbol{x}$ lokální minimum nebo maximum, říkáme, že f má v $\boldsymbol{x}$ lokální extrém. Podobně ostrý lokální extrém znamená ostré lokální minimum nebo ostré lokální maximum.



(a) (b)

Obr. 7.1.

Rozdíl mezi ostrým a neostrým extrémem je jistě zřejmý. Obrázek 7.1.(a) představuje ostré lokální minimum funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $(0,0)$, kdežto v části 7.1.(b) je $(0,0)$ neostré lokální minimum funkce $f(x,y) = x^2y^2$.

1.1 Stacionární body

Bod, podezřelý z toho, že v něm funkce nabývá lokální extrém, odhalíme z jednoduché geometrické podmínky. Tečná rovina (event. nadrovina v případě tří a více proměnných) musí být v takovém bodě kolmá na osu funkčních hodnot. Diferenciál, který zadává rovinu tohoto typu, je nutně nulový. Pro funkce třídy alespoň C^1 pak z Tvrzení 5.1 plyne, že nulovost diferenciálu je ekvivalentní s požadavkem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

V této chvíli už nás proto nepřekvapí, že platí

Věta 7.2. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ a nechť funkce $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li $\boldsymbol{x} \in G$ bod, ve kterém f nabývá lokální extrém, pak*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = 0$$

pro každý směr $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\boldsymbol{x}$ je bod lokálního minima funkce f. (Pro maximum by byl důkaz zcela analogický.) Nechť $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ je daný vektor. Víme, že pro jisté okolí U bodu $\boldsymbol{x}$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{y}), \tag{7.1}$$

kdykoli $\boldsymbol{y} \in U$. Můžeme najít tak malý interval $\langle -\delta, \delta \rangle \subset \mathbb{R}$, že pro všechna $t \in \langle -\delta, \delta \rangle$ leží bod $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}$ stále v okolí U. V tom případě funkce $\varphi\colon \langle -\delta, \delta \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})$$

má v bodě 0 lokální minimum: podle (7.1) je totiž

$$\varphi(0) = f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) = \varphi(t).$$

Protože f je třídy C^1, existuje její derivace ve směru $\boldsymbol{h}$. Pro funkci φ to znamená, že existuje $\varphi'(0)$. Podle známé věty pro funkce jedné proměnné musí být $\varphi'(0) = 0$. Tudíž

$$0 = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}).$$

□

Důsledek 7.3. *Má-li C^1 funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ lokální extrém, pak v tomto bodě platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \tag{7.2}$$

Důkaz. Použijeme Větu 7.2 s $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_i$ pro $i = 1, \dots, n$. $\square$

Definice 7.4. *Bod* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, *pro který platí* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0$ *se nazývá* **stacionární bod** *funkce* f.

Stručně zapsaná podmínka (7.2) pro stacionární bod je

$$\operatorname{grad} f = 0. \tag{7.3}$$

Někdo by se mohl zeptat, co lze říci o funkci f v bodě lokálního extrému v případě, že f není třídy C^1. Pak samozřejmě nemusí Věta 7.2 platit z jednoduchého důvodu: příslušná derivace ve směru $\boldsymbol{h}$ vůbec neexistuje. Že to může nastat, vidíme např. na funkci

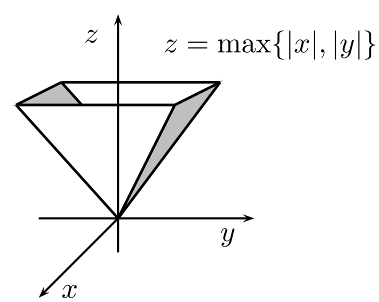
$$f(x, y) = \max\{|x|, |y|\},$$

viz obr. 7.2. Bod $(0, 0)$ je minimum, ale díky ostrému vrcholu na grafu funkce f neexistuje derivace v žádném směru. Obecně platí následující alternativa: v bodě lokálního extrému buďto v nějakém směru derivace neexistuje nebo jsou všechny nulové.

Příklad 7.5. Nalezněte všechny stacionární body funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - x + y$ a funkce $g(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$.

Řešení: V případě funkce f hledáme všechny body $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x - y - 1 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 1 = 0.$$



Obr. 7.2.

Z druhé rovnice ihned plyne, že $x = 1$. Dosazením do první dostaneme $y = 0$. Závěr je takový, že funkce f má jediný stacionární bod $(1, 0)$.

U funkce g postupujeme podobně. Hledáme řešení soustavy tří rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 2x \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2y \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= 2z \cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0.
\end{aligned}$$

Rozlišíme dva případy. Buď $\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Pak

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, \dots$$

Nebo $\cos(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$, a tak ke splnění soustavy musí nutně být $x = y = z = 0$. Z těchto dvou případů dostáváme, že množina stacionárních bodů funkce g je

$$(0, 0, 0) \cup \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 = \pi/2 + k\pi,\ k \geq 0\big\}.$$

Je to nekonečně mnoho soustředných sfér s poloměry $\sqrt{\pi/2 + k\pi}$, $k = 0, 1 \dots$ spolu s počátkem $(0, 0, 0)$.

Je třeba mít na paměti, že stacionární bod je pouhým kandidátem na nabývání lokálního extrému. Jestli se nabývá lokální minimum či maximum nebo jestli se vůbec žádného extrému nenabývá, rozhoduje ve většině případů chování druhého diferenciálu. Myšlenka v pozadí je celkem jednoduchá. V okolí stacionárního bodu $\boldsymbol{x}$ rozvineme funkci v Taylorovu řadu do řádu 2 podle Věty 6.18. Pro přírůstek $\boldsymbol{h}$ z jistého malého okolí nuly U platí

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 f(\boldsymbol{x}).$$

Protože $\boldsymbol{x}$ je stacionární, je podle (7.3) $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = 0$. Zbývá vyjádření $(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2$. Připomeňme si (6.17),

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 f(\boldsymbol{x}). \tag{7.4}$$

Rozdíl hodnot funkce v bodech $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{x}$ je tak odhadnut

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]. \tag{7.5}$$

Bude-li funkce $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$ kladná pro $\boldsymbol{h} \in U \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, tak (7.5) říká, že v $\boldsymbol{x}$ je lokální minimum. Bude-li naopak výraz $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$ záporný, pak v $\boldsymbol{x}$ je lokální maximum. Nenastane-li však ani jeden z těchto případů, tzn. druhý diferenciál $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$ je pro jistá $\boldsymbol{h} \in U$ kladný a pro jiná záporný, tak v $\boldsymbol{x}$ lokální extrém nenastává.

Vidíme, že role druhého diferenciálu zde velmi podstatně vystupuje do popředí. Proto se musíme na chvíli pozastavit u funkcí, které proměnné $\boldsymbol{h}$ přiřadí hodnotu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$.

1.2 Kvadratické formy

Z Definice 6.14 už víme, co je bilineární forma. Z každé bilineární formy lze snadno vytvořit jiný typ funkce, tzv. kvadratickou formu.

Definice 7.6. *Nechť* $\psi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je bilineární forma na euklidovském prostoru* $\mathbb{R}^n$. *Funkce* $q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definovaná*

$$q(\boldsymbol{h}) = \psi(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}),\ \ \boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n),$$

se nazývá **kvadratická forma** *na* $\mathbb{R}^n$.

Jako je nejběžnější bilineární formou skalární součin, tak nejběžnější kvadratická forma je forma vzniklá ze skalárního součinu

$$q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h} = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2 = \|\boldsymbol{h}\|^2.$$

Tvar této funkce už sám napovídá důvod, proč se výrazům tohoto typu říká kvadratické formy. Všechny kvadratické formy jsou homogenní funkce 2. stupně. Tzn.

$$q(t\boldsymbol{h}) = t^2 q(\boldsymbol{h})$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{h} \in X$. Z našeho hlediska budeme rozdělovat kvadratické formy do tří skupin.

Definice 7.7. *Nechť* $q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je kvadratická forma na euklidovském prostoru. Pak* q *se nazývá*

(i) **pozitivně definitní**, *jestliže existuje* $\alpha > 0$ *takové, že*

$$q(\boldsymbol{h}) \geq \alpha \|\boldsymbol{h}\|^2, \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) **negativně definitní**, *jestliže existuje* $\alpha > 0$ *takové, že*

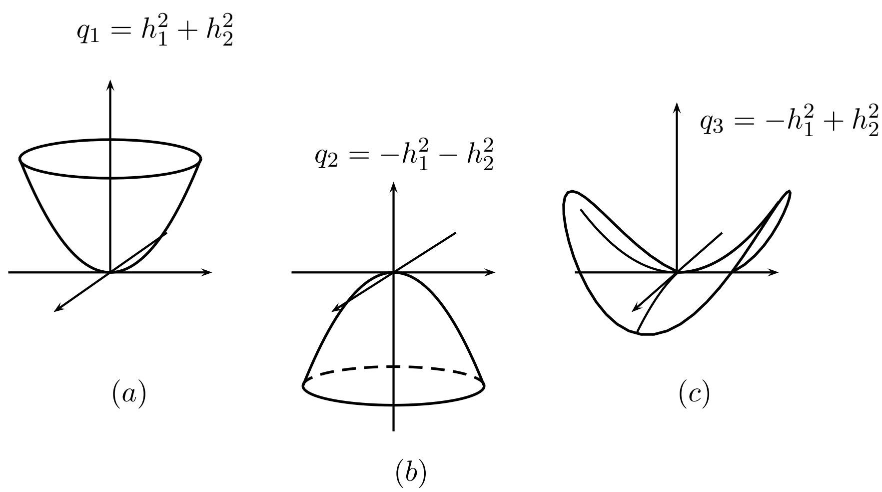
$$q(\boldsymbol{h}) \leq -\alpha \|\boldsymbol{h}\|^2, \text{ pro všechna } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n;$$

(iii) **indefinitní**, *jestliže existují* $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$ *taková, že*

$$q(\boldsymbol{h}) > 0 \quad a \quad q(\boldsymbol{k}) < 0.$$

Je třeba upozornit, že výše vyjmenované tři skupiny nepokrývají všechny možnosti, které mohou nastat. Např. kvadratická forma na $\mathbb{R}^2$ definovaná $q(h_1, h_2) = h_1^2$ splňuje, že $q(\boldsymbol{h}) \geq 0$ pro všechna $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$ a navíc $q(\boldsymbol{h}_0) = 0$ pro nenulové $\boldsymbol{h}_0 = (0, 1)$. Taková forma nezapadá ani do jedné ze skupin v Definici 7.7.

Na obr. 7.3 jsou ukázky grafů kvadratických forem na $\mathbb{R}^2$ odpovídající všem třem typům.



Obr. 7.3.

Forma $q_1(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$ je pozitivně definitní ($\alpha = 1$), $q_2(h_1, h_2) = -h_1^2 - h_2^2$ je negativně definitní ($\alpha = 1$) a $q_3(h_1, h_2) = -h_1^2 + h_2^2$ je indefinitní ($q_3(1, 0) < 0$, $q_3(0, 1) > 0$).

Stejně jako bilineární forma, je i každá kvadratická forma $q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je určena čtvercovou maticí řádu n, tentokráte ale symetrickou,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Jak na matici $\mathbf{A}$ poznat, jaký typ kvadratické formy zadává, ukazuje následující kritérium.

Věta 7.8. *(Sylvestrovo kritérium) Kvadratická forma* $q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je*

(i) *pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice* $\mathbf{A}$ *jsou kladné, tj.*

$$a_{11} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, \dots,\ \det \mathbf{A} > 0;$$

(ii) *negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminanty střídají znaménka počínaje záporným,*

$$a_{11} < 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0, \dots,\ (-1)^n \det \mathbf{A} > 0;$$

(iii) *indefinitní, jestliže* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *a přitom neplatí ani pravidlo (i) ani pravidlo (ii).*

Předchozí věta nezahrnuje případ, kdy $\det \mathbf{A} = 0$. To odpovídá tomu, že ani Definice 7.7 nepokrývala všechny možnosti.

1.3 Kritérium pro extrémy

Nyní jsme už vyzbrojeni dostatečnými poznatky z předešlých sekcí, abychom mohli dokázat větu o nabývání extrému pro funkce více proměnných.

Věta 7.9. *Nechť* f *je funkce třídy* C^2 *na otevřené množině* G *euklidovského prostoru* $\mathbb{R}^n$ *a nechť* $\boldsymbol{x} \in G$ *je stacionární bod. Je-li kvadratická forma* $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$

(i) *pozitivně definitní, pak je v* $\boldsymbol{x}$ *ostré lokální minimum,*

(ii) *negativně definitní, pak je v* $\boldsymbol{x}$ *ostré lokální maximum,*

(iii) *indefinitní, pak v* $\boldsymbol{x}$ *není lokální extrém (*$\boldsymbol{x}$ *je tzv. sedlový bod).*

Důkaz. (i) Předpokládejme, že $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$ je pozitivně definitní,

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] \geq \alpha \|\boldsymbol{h}\|^2 \tag{7.6}$$

pro jisté $\alpha > 0$. Druhý diferenciál je určen svou Hessovou maticí, jejíž složky tvoří všechny druhé parciální derivace. Protože f je třídy C^2, jsou tyto parciální derivace spojité. Znamená to, že pro $\boldsymbol{y}$ blízká bodu $\boldsymbol{x}$ se Hessova matice v bodě $\boldsymbol{y}$ příliš neliší od Hessovy matice v bodě $\boldsymbol{x}$. Proto i pro $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{y})$ bude platit (7.6) s eventuelně trochu pozměněným α. Přesně řečeno: existuje okolí U bodu $\boldsymbol{x}$, že pro každé $\boldsymbol{y} \in U$ platí

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{y})[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] \geq \alpha_0 \|\boldsymbol{h}\|^2 \tag{7.7}$$

pro jisté $\alpha_0 > 0$ a všechna $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Zvolme teď takové dostatečně malé $\boldsymbol{h}$, aby stále bylo $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in U$. Nyní užijeme Taylorův rozvoj pro funkci $f(\boldsymbol{x})$ do druhého řádu. Podle Věty 6.18 máme

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 f(\boldsymbol{x} + \vartheta \boldsymbol{h}), \tag{7.8}$$

pro jisté $\theta \in (0,1)$. Dále víme, že $\boldsymbol{x}$ je stacionární bod, a tedy $\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = 0$. K vyjádření $(\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2$ využijeme rovnice (6.17). Tím se nám (7.8) zredukuje na tvar

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x}+\vartheta\boldsymbol{h})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}]. \tag{7.9}$$

Protože $\boldsymbol{h}$ bylo zvoleno, aby $\boldsymbol{x}+\vartheta\boldsymbol{h} \in U$ pro všechna $\vartheta \in \langle 0,1\rangle$, je možné použít odhad (7.7) pro druhý diferenciál. Dostaneme tak

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) \geq \frac{\alpha_0}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2.$$

Odtud vidíme, že $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) > f(\boldsymbol{x})$ pro všechna $\boldsymbol{h}$ nenulová a taková, že $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in U$.

(ii) Pro negativně definitní $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})$ je důkaz úplně stejný, až na to, že v (7.9) je na pravé straně záporný člen. Proto je v $\boldsymbol{x}$ lokální maximum.

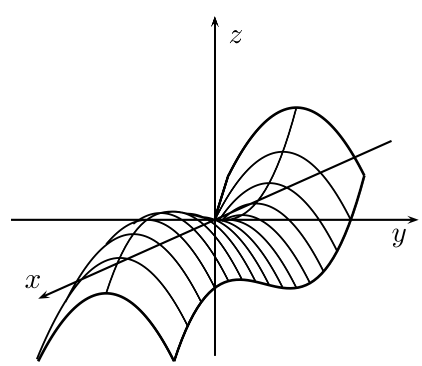
(iii) Zbývá případ, kdy kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}]$ je indefinitní. Existují tedy vektory $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{k}$ takové, že

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}] > 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}] < 0.$$

Z (7.9) opět dostáváme, že při malém posunu z bodu $\boldsymbol{x}$ ve směru k bodu $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ hodnota funkce vzroste. Podobně při posunu ve směru k bodu $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}$ hodnota funkce klesne. Odtud plyne, že v $\boldsymbol{x}$ není lokální extrém. □

Jako ukázku použití Věty 7.9 spočteme následující

Příklad 7.10. Vyšetřete lokální extrémy funkce $z = x(3-x^2) - y^2$.



Obr. 7.4.

Stacionární body musí vyhovovat podmínkám

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 3x^2 \quad \text{a} \quad 0 = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Ty nám dávají $x = \pm 1$ a $y = 0$. Funkce z má dva stacionární body $(1,0)$ a $(-1,0)$. Zjistíme nyní, jakého typu je kvadratická forma $\mathrm{d}^2 z$ v příslušných bodech. K tomu je třeba spočítat determinanty Hessovy matice. Její složky jsou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,\ \text{a}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

V bodě $(1,0)$:

$$\mathbf{H}(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Protože $-6 < 0$ a $\det \mathbf{H}(1,0) = 12 > 0$, je $\mathrm{d}^2 z$ je v $(1,0)$ negativně definitní. Podle Věty 7.9 je v $(1,0)$ lokální maximum funkce z. V bodě $(-1,0)$ je

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -12 < 0,$$

což odpovídá bodu (iii) v Sylvestrově kriteriu (Věta 7.8), a tedy $\mathrm{d}^2 z$ je indefinitní. Funkce z nemá v $(-1,0)$ lokální extrém, $(-1,0)$ je sedlový bod. Graf funkce z je na obr. 7.4.

2 Vázané extrémy

V této části popíšeme, jak řešit jiný typ úloh na extrémy než jsme doposud viděli. Jedná se o extrémy *vzhledem k množině*. Znamená to, že zkoumáme funkci pouze v bodech dané množiny a mezi nimi hledáme největší nebo nejmenší funkční hodnotu. Metoda, kterou budeme užívat, se obzvláště hodí v případech, kdy příslušná množina je popsána jednou či více rovnicemi. Zatím se ale podíváme na první jednoduchý příklad hledání extrému vzhledem k množině.

Příklad 7.11. Nalezněte minimum a maximum funkce $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na množině M zadané rovnicí $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Řešení: V tomto jednoduchém případě není nutné vynalézat nějakou speciální metodu řešení. Množina M je vlastně kružnice, neboť původní rovnice se nechá přepsat do tvaru

$$(x+1)^2 + y^2 = 1.$$

Odtud vidíme, že střed je $(-1,0)$ a poloměr 1. Protože M je uzavřená a omezená a zadaná funkce f spojitá, nabývá f svého minima i maxima vzhledem k M podle Věty 4.1. Stojí za povšimnutí, že bez omezení se na množinu M by funkce f neměla žádný extrém, neboť nemá žádné stacionární body.

K cíli teď vedou dvě cesty. Ta první, elegantnější, spočívá v postřehu, že funkce f je lineární. Směr jejího největšího růstu udává $\operatorname{grad} f = (\sqrt{3}, -1)$. Vyjdeme-li od středu kružnice M ve směru gradientu, dorazíme k bodu na M, ve kterém je maximum. Vydáme-li se od středu v opačném směru, musíme dojít do bodu minima. Protože poloměr kružnice je 1, přičtením jednotkového vektoru ve směru gradientu

$$\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

ke středu $(-1,0)$ dostaneme bod maxima

$$\boldsymbol{x}_{\max} = (-1,0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Podobně odečtení téhož vektoru od středu získáme bod minima

$$\boldsymbol{x}_{\min} = (-1,0) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Hodnoty v těchto bodech jsou $f(\boldsymbol{x}_{max}) = 4 - \sqrt{3}$ a $f(\boldsymbol{x}_{min}) = -\sqrt{3}$.

Druhá cesta je početní. Množina M je parametricky popsána

$$\begin{aligned} x &= -1 + \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \tag{7.10}$$

pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Dosadíme toto vyjádření do $f(x, y)$ a dostaneme funkci proměnné t

$$\sqrt{3}(-1 + \cos t) - \sin t + 2 = \sqrt{3} \cos t - \sin t + 2 - \sqrt{3}.$$

Úloha se zredukovala na nalezení minima a maxima posledního výrazu pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Položíme tedy první derivaci rovnou nule,

$$-\sqrt{3} \sin t - \cos t = 0, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg} t = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tomu odpovídají dvě řešení v $\langle 0, 2\pi \rangle$: $t_1 = \frac{5\pi}{6}$ a $t_2 = \frac{11\pi}{6}$. Dosazením do (7.10) zjistíme, že pro hodnotu parametru t_1 dostáváme bod $\boldsymbol{x}_{\min}$ a pro hodnotu t_2 bod $\boldsymbol{x}_{\max}$.

K právě uvedenému příkladu se vrátíme až budeme mít dokázánu hlavní větu této části a spočítáme jej také pomocí nové metody.

Obecná situace, kterou budeme studovat je tato: nechť $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na euklidovském prostoru. Mějme dále p funkcí $g_1, g_2, \dots, g_p$ opět třídy C^1, které nám zadávají množinu M, a to tak, že v bodech M platí současně následující rovnice

$$\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{x}) &= 0, \\ g_2(\boldsymbol{x}) &= 0, \\ &\vdots \\ g_p(\boldsymbol{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Matematický zápis množiny M je

$$M = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; g_1(\boldsymbol{x}) = 0,\ g_2(\boldsymbol{x}) = 0, \dots,\ g_p(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\} = \bigcap_{i=1}^{p} \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\}.$$

Pro představu: $\mathbb{R}^n$ euklidovský prostor dimenze n. Množina bodů

$$\Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\}$$

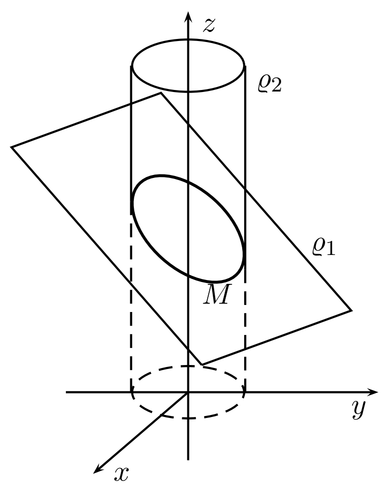
představuje v typických případech nadplochu, jejíž dimenze je $n - 1$. Průnik

$$\Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\} \cap \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_2(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\}$$

je útvar v $\mathbb{R}^n$ mající dimenzi již $n - 2$. Přidáváme-li do průniku další množiny, dimenze výsledného útvaru se sníží vždy o jednu. Množina M je tak $(n - p)$-dimenzionální plocha v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Např. při $n = 3$ položme

$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 2 \quad \text{a} \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

První udává rovinu ϱ_1 procházející body $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ a $(0,0,2)$. Druhá funkce zadává plášť ϱ_2 nekonečného válce, jehož osu tvoří osa z a jehož poloměr podstavy je 1. Každá z podmínek $g_1(x,y,z)=0$ a $g_2(x,y,z)=0$ sama o sobě definuje dvourozměrné plochy. Společně pak určují křivku danou jejich průnikem, v našem případě elipsu na obr.7.5.



Obr. 7.5

Slíbená metoda spočívá v následující větě. Její důkaz zde uvádět nebudeme, ale je ho možné nalézt např. v [3].

Věta 7.12. *(o Lagrangeových multiplikátorech) Nechť f, $g_1,\dots,g_p$ jsou funkce třídy C^1 na otevřené množině G v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, $n>p$. Mějme množinu M zadánu*

$$M=\bigcap_{i=1}^{p}\Big\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x})=0\Big\}\subset G.$$

Dále předpokládejme, že vektory $\operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{x}), \operatorname{grad} g_2(\boldsymbol{x}),\dots,\operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{x})$ *jsou lineárně nezávislé ve všech bodech množiny M. Je-li bod $\boldsymbol{x}_0\in M$ bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M, pak existují taková čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}$, že bod $\boldsymbol{x}_0$ je stacionární bod tzv. Lagrangeovy funkce*

$$L=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}). \tag{7.11}$$

Poznámka 7.13. Rovnicím $g_1(\boldsymbol{x})=0,\ g_2(\boldsymbol{x})=0,\dots,\ g_p(\boldsymbol{x})=0$ se někdy říká vazebné podmínky a extrému vzhledem k množině „vázaný extrém“. Čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ jsou označována názvem *Lagrangeovy multiplikátory* a Věta 7.12 bývá v literatuře uváděna kromě názvu věta o Lagrangeových multiplikátorech taká pod názvem věta o vázaném extrému. Podmínka pro stacionární bod Lagrangeovy funkce rozepsaná do složek představuje n

rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}-\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}-\dots-\lambda_p\frac{\partial g_p}{\partial x_1}&=0,\\ &\ \,\vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}-\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_n}-\dots-\lambda_p\frac{\partial g_p}{\partial x_n}&=0.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Neznámých je však $n+p$: $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_p$. Proto k výše uvedené soustavě přidáme p vazebných podmínek $g_1(\boldsymbol{x})=0,\ g_2(\boldsymbol{x})=0,\dots,\ g_p(\boldsymbol{x})=0$ a vyrovnáme tak počet rovnic i neznámých. Tuto soustavu pak v konkrétních případech řešíme, abychom našli body podezřelé z extrému.

Podmínka, aby gradienty $\operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{x}),\ \operatorname{grad} g_2(\boldsymbol{x}),\dots,\operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{x})$ byly lineárně nezávislé vektory je ekvivalentně vyjádřena požadavkem, aby matice typu $p\times n$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

měla hodnost p ve všech bodech množiny M. V tomto tvaru je formulován předpoklad Věty 7.5 v mnoha učebnicích.

Vraťme se ještě k podmínce stacionarity bodu $\boldsymbol{x}_0$ pro Lagrangeovu funkci $L(\boldsymbol{x})$. Kromě podrobného rozpisu do složek, který je v (7.12), můžeme podmínku stacionarity vyjádřit následovně:

$$\operatorname{grad} L(\boldsymbol{x}_0)=0,\ \text{tj.}\ \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)=\lambda_1\operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{x}_0)+\dots+\lambda_p\operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{x}_0).$$

Vidíme, že v bodě lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M je gradient funkce f lineární kombinací gradientů funkcí z vazebných podmínek. Takto vyjádřená Věta 7.12 o Lagrangeových multiplikátorech má názornou geometrickou interpretaci. Podívejme se na ni blíže v jednoduchém případě roviny $\mathbb{R}^2$. Představme si, že množina M je křívka daná grafem funkce $y=g(x)$. Přepíšeme si tuto rovnici do tvaru vazební podmínky

$$g_1(x,y)=0,\quad \text{kde } g_1(x,y)=g(x)-y.\tag{7.13}$$

V části o geometrickém významu gradientu jsme zjistili, že $\operatorname{grad} g_1$ je normálový vektor ke grafu funkce $y=g(x)$:

$$\boldsymbol{n}=\operatorname{grad} g_1=\left(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)=(g'(x),-1).\tag{7.14}$$

Předpokládejme, že v bodě $(x_0,y_0)\in M$ nabývá funkce $f(x,y)$ svého extrému vzhledem ke křivce M. Vyšetřujeme-li naší funkci pouze v bodech množiny M, sledujeme chování složené funkce $f(x,g(x))$, která závisí už jen na jedné proměnné. Má-li tato funkce v bodě x_0 extrém, je její derivace nulová:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,g(x))\,\Big|_{x=x_0}=0.$$

Podle vzorce o derivaci složené funkce (Věta 6.1(i) nebo Důsledek 6.5) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, g'(x_0) = 0.$$

To ovšem není nic jiného než skalární součin dvou vektorů

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \big(1, g'(x_0)\big) = 0. \tag{7.15}$$

První vektor je $\operatorname{grad} f$. Ve druhém vektoru není těžké rozpoznat tečný vektor ke grafu funkce g v bodě x_0: je totiž zjevně kolmý na normálová vektor $\boldsymbol{n}$ v (7.14). Poslední rovnice (7.15) pak říká, že $\operatorname{grad} f$ je kolmý na tečný vektor, tj. musí mít směr normály:

$$\operatorname{grad} f = \lambda \boldsymbol{n} = \lambda \operatorname{grad} g_1.$$

To je přesně tvrzení Věty 7.12 pro náš speciální případ.

Uvedeme si dva ilustrační příklady na použití Věty o vázaných extrémech. V prvním se vrátíme k Příkladu 7.11 a vyřešíme jej metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Příklad 7.14. Zjistěte extrém funkce $\sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Máme funkci $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ a vazebnou podmínku $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2$. Sestavíme Lagrangeovu funkci (7.11):

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2 - \lambda(x^2 + 2x + y^2).$$

Nyní si vypíšeme podmínky pro stacionární bod funkce $L(x,y)$ a přidáme k nim vazebnou podmínku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} &= 0 & & & \sqrt{3} - 2\lambda(x+1) &= 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} &= 0 & &\text{tj.} & -1 - 2\lambda y &= 0,\\ g(x,y) &= 0 & & & x^2 + 2x + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li λ z prvních dvou rovnic, dostaneme vztah mezi x a y: $y = -(x+1)/\sqrt{3}$. Ten dosadíme do třetí rovnice. Vzniklou kvadratickou rovnici

$$x^2 + 2x + \frac{(x+1)^2}{3} = 0$$

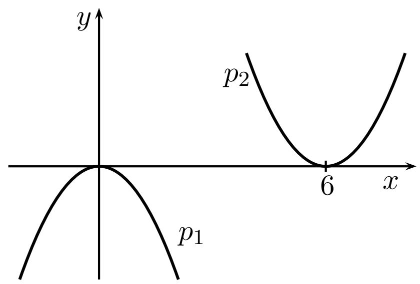
vyřešíme. Dostaneme $x_1 = (\sqrt{3} - 2)/2$ a $x_2 = -(\sqrt{3} + 2)/2$. Dopočtením příslušných y-ových souřadnic získáme dva body

$$\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Jak se snadno přesvědčíme porovnáním funkčních hodnot, první bod je bod maxima a druhý je bod minima. Máme tak potřetí ověřeno řešení z příkladu 7.11.

Pokud je vazebných podmínek více a nejsou lineární, obvykle řešení vede k rovnicím vyššího stupně než dva nebo dokonce k rovnicím transcendentním.

Příklad 7.15. Jaká je vzdálenost parabol $p_1\colon y = -x^2$ a $p_2\colon y = (x-6)^2$? Viz obr. 7.6.



Obr. 7.6

Funkce, kterou budeme minimalizovat je funkce f vzdálenosti dvou bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) v rovině, z nichž jeden leží na p_1 a druhý na p_2. Funkce f závisí na čtyřech proměnných x_1, y_1, x_2, y_2. Máme tak

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ g_1(x_1, y_1) &= y_1 + x_1^2, \\ g_2(x_2, y_2) &= y_2 - (x_2 - 6)^2. \end{aligned}$$

Protože minimum funkce f se nabývá v tom samém bodě jako minimum f^2, můžeme pro zjednodušení výpočtů uvažovat místo vzdálenosti její druhou mocninu, kterou označíme opět symbolem f

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Vazebné podmínky jsou $g_1(x_1, y_1) = 0$ a $g_2(x_2, y_2) = 0$ a Lagrangeova funkce

$$L = f(x_1, y_1, x_2, y_2) - \lambda_1 g_1(x_1, y_1) - \lambda_2 g_2(x_2, y_2).$$

Zderivujeme tuto funkci podle x_1, x_2, y_1 a y_2 a sestavíme následující soustavu šesti rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= 0 & \qquad\qquad x_1 - x_2 &= \lambda_1 x_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= 0 & x_2 - x_1 &= -\lambda_2 (x_2 - 6), \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_1} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y_1} &= 0 \qquad \text{tj.} & y_1 - y_2 &= \frac{\lambda_1}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_1} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y_2} &= 0 & y_2 - y_1 &= \frac{\lambda_2}{2}, \\ g_1(x_1, y_1) &= 0 & y_1 &= -x_1^2, \\ g_2(x_2, y_2) &= 0 & y_2 &= (x_2 - 6)^2. \end{aligned}$$

Ze třetí a čtvrté rovnice ihned plyne, že $\lambda_1 = -\lambda_2$. Když toho využijeme v první a v druhé rovnici, dostaneme $x_1 + x_2 = 6$. Z tohoto vztahu plyne, že $x_1 = x_2 - 6$, a proto nám pátá a šestá rovnice dávají $y_1 = -y_2$. Dosadíme-li za y_2 do třetí (nebo čtvrté) rovnice, dostaneme $y_1 = \lambda_1/4$. Zatím jsme tedy vyvodili následující

$$y_1 = -y_2 = \frac{\lambda_1}{4} = -\frac{\lambda_2}{4} \quad \text{a} \quad x_1 + x_2 = 6. \tag{7.16}$$

Budeme teď vylučovat z původních rovnic všechny proměnné kromě x_1 a y_1, tzn. za ostatní budeme dosazovat z (7.16). Tím se nám šest rovnic zredukuje na tyto dvě

$$x_1 - 3 = 2x_1y_1, \qquad y_1 = x_1^2.$$

Vyloučením y_1 dostaneme rovnici třetího stupně

$$2x_1^3 + x_1 - 3 = 0.$$

Tato rovnice má pouze jediné reálné řešení $x_1 = 1$. Odtud pomocí (7.16) dopočítáme všechny ostatní

$$x_1 = 1, \quad y_1 = -1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 1.$$

Body, ve kterých se realizuje minimální vzdálenost jsou $(1, -1) \in p_1$ a $(5, 1) \in p_2$. Závěr: vzdálenost mezi parabolami p_1 a p_2 je vzdálenost bodů $(1, -1)$ a $(5, 1)$:

$$\|(1, -1) - (5, 1)\| = \sqrt{20}.$$

Stejně jako Věta 7.9 udávala postačující podmínky pro to, aby stacionární bod byl bodem lokálního minima či maxima, máme i v případě vázaných extrémů podobné kritérium. Z toho, jak se chová jistá kvadratická forma můžeme zjistit, zda je v příslušném bodě lokální extrém.

Věta 7.16. *Nechť $f, g_1, \ldots, g_p$ jsou funkce třídy C^2 na otevřené množině G v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, $n > p$ a mějme množinu M zadánu*

$$M = \bigcap_{i=1}^{p} \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) = 0 \Big\} \subset G.$$

Dále předpokládejme, že vektory $\operatorname{grad} g_1, \ldots, \operatorname{grad} g_p$ *jsou lineárně nezávislé ve všech bodech množiny M. Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in M$ je bod s následujícími vlastnostmi*

(i) *existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, že Lagrangeova funkce*

$$L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_p g_p(\boldsymbol{x})$$

má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ stacionární bod, $\operatorname{grad} L(\boldsymbol{x}_0) = 0$,

(ii) *kvadratická forma* $\mathrm{d}^2 L(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]$ *uvažovaná pouze pro vektory $\boldsymbol{h}$ z množiny*

$$T = \bigcap_{i=1}^{p} \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \perp \operatorname{grad} g_i(\boldsymbol{x}_0) \Big\}$$

je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, resp. indefinitní).

Pak funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ ostré lokální minimum (resp. maximum, resp. extrém nenastává) vzhledem k množině M.

Množina T z bodu (ii), na které uvažujeme kvadratickou formu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x}_0)$, je tečná „nadrovina“ k množině M v bodě $\boldsymbol{x}_0$ posunutá do počátku. Uvozovky u slova „nadrovina“ znamenají, že její dimenze nemusí být jen o jednu menší než je dimenze prostoru. Dimenze T závisí na počtu vazebných podmínek a obecně T má dimenzi $n-p$. Zmenšení oboru pro testování definitnosti formy $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ je podstatné. Může se totiž stát, že kvadratická forma je indefinitní na $\mathbb{R}^n$, ale její zúžení na T je např. pozitivně definitní. Uvidíme to ostatně v následujícím příkladu.

Příklad 7.17. Uvažujme funkci $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}.$$

Má zde funkce f nějaký lokální extrém?

Vazbová podmínka je zde jedna

$$g(x,y) = 0, \text{ kde } g(x,y) = y + e^{-x^2} - 1.$$

Zjistíme nejprve, jaké body vyhovují podmínce (i) Věty 7.16. Lagrangeova funkce je

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Příslušné rovnice pak mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 & & & 2x &= -2\lambda x e^{-x^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 & &\text{tj.} & -2y &= \lambda, \\ g(x,y) &= 0 & & & 0 &= y + e^{-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Řešení rozdělíme na dva případy: $\lambda = 0$ a $\lambda \neq 0$. V prvním případě dostaneme řešení $x = y = \lambda = 0$. Pro $\lambda \neq 0$ máme z prvních dvou rovnic

$$e^{-x^2} = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{\lambda}{2}.$$

Dosazením do třetí rovnice a po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

která nemá reálné řešení. Našli jsme tak pouze jediný bod vyhovující podmínce (i), a to $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$.

Postoupíme teď k bodu (ii). Druhý diferenciál $\mathrm{d}^2 L(\boldsymbol{x}_0)$ s $\lambda = 0$ je dán Hessovou maticí

$$\mathrm{d}^2 L(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

Zjistíme, jaká je kvadratická forma daná maticí (7.17). Vyšetřovat ji ovšem budeme pouze pro taková $\boldsymbol{h}$ splňující požadavky z bodu (ii):

$$\boldsymbol{h} \perp \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_0), \text{ tj. } \boldsymbol{h} \perp (0,1).$$

To jsou pouze vektory tvaru $\boldsymbol{h} = (h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$. Takže

$$\mathrm{d}^2 L(\boldsymbol{x}_0)[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}] = (h, 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = 2h^2 = 2\|\boldsymbol{h}\|^2.$$

Vidíme, že tato forma je pozitivně definitní. Z Věty 7.16 plyne, že bod $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$ je ostré lokální minimum funkce f na množině M.

Pozastavme se u tohoto příkladu ještě chvilku. Kvadratická forma daná maticí (7.17) uvažovaná na celém $\mathbb{R}^2$ je indefinitní, neboť její první subdeterminant je kladný a druhý záporný. Pokud ji ovšem testujeme pouze pro vektory s druhou souřadnicí nulovou, stává se pozitivně definitní.

3 Nejmenší a největší hodnota funkce

Ne každá množina se nechá popsat rovnicí nebo soustavou rovnic. Příklad takové množiny je čtverec $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ v $\mathbb{R}^2$ nebo část rotačního paraboloidu

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1\},$$

viz obr. 2.5(a) apod. Zjištění největší a nejmenší hodnoty spojité funkce na takové množině se skládá ze dvou kroků. Nejprve vyšetříme funkci na vnitřku množiny a posléze na její hranici. Pro vnitřek užijeme metodu lokálních extrémů a pro hranici metodu extrémů vázaných.

Příklad 7.18. Zjistíme maximální a minimální hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \le 5\}.$$

Množina M je kruh se středem $(2,0)$ a poloměrem 3, neboť nerovnost pro M je možné přepsat jako $(x-2)^2 + y^2 \le 9$. Podíváme se nejprve na stacionární body zadané funkce.

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4.$$

Tato soustava má jediné řešení $\boldsymbol{x}_0 = (3,2)$. Bod $\boldsymbol{x}_0$ leží v M, je tedy jedním z kandidátů pro extrém funkce f. Hodnota je $f(\boldsymbol{x}_0) = -2$.

Vyšetříme nyní hranici ∂M. Ta se skládá z kružnice o rovnici

$$0 = g(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 5.$$

Podle Věty 7.9 v bodě extrému platí, že Lagrangeova funkce $L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ má stacionární bod. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad g(x,y) = 0$$

pro jisté $\lambda \in \mathbb{R}$. Výpočtem dostáváme soustavu

$$\begin{array}{ccc} 2x - 6 = \lambda(2x-4) & & x = \dfrac{3-2\lambda}{1-\lambda} = 2 + \dfrac{1}{1-\lambda} \\ 2y - 4 = \lambda\, 2y & \text{tj.} & y = \dfrac{2}{1-\lambda} \\ x^2 - 4x + y^2 = 5 & & (x-2)^2 + y^2 = 9. \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic plyne, že $y = 2(x-2)$. Dosadíme-li za x do třetí, máme

$$(x-2)^2 + 4(x-2)^2 = 9.$$

Tato rovnice má dvě řešení $= 2 \pm \dfrac{3}{\sqrt{5}}$. Volbě znaménka minus odpovídá výsledný bod

$$\boldsymbol{x}_1 = \left(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right).$$

Hodnota funkce v tomto bodě je $f(\boldsymbol{x}_1) = 12 + 30/\sqrt{5}$. Pro druhou volbu znaménka máme bod

$$\boldsymbol{x}_2 = \left(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right).$$

Hodnota f v tomto bodě je $f(\boldsymbol{x}_2) = 12 - 30/\sqrt{5}$. Hodnota v $\boldsymbol{x}_0$ je $f(\boldsymbol{x}_0) = -2$. Porovnáním těchto hodnot jsme vedeni k následujícímu závěru:

$$\max_M f = f(\boldsymbol{x}_1) = 12 + \frac{30}{\sqrt{5}}, \quad \min_M f = f(\boldsymbol{x}_0) = -2.$$

Pokud množina, na které vyšetřujeme spojitou funkci f, je uzavřená a omezená, vždy největší a nejmenší hodnota existuje (viz Větu 4.1). Nesplňuje-li množina M tyto požadavky, může se stát, že funkce f nenabývá žádný extrém na M. Uvažujme např. funkci

$$f(x,y) = x + y$$

na otevřeném čtverci $Q = (0,1) \times (0,1)$. To je sice omezená množina, nikoli však uzavřená. Je jasné, že kdyby se jednalo o uzavřený čtverec, tak minimum funkce f je v bodě $(0,0)$ a maximum v bodě $(1,1)$. Tyto body ale do Q nepatří. A v žádném jiném funkce f extrém nenabývá, neboť žádný bod z Q není stacionárním bodem.

Jiný příklad je s uzavřenou, ale neomezenou množinou

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

Je to vlastně přímka procházející počátkem. Funkce $f(x,y) = x + y$ je na M neomezená shora i zdola, a tak nenabývá ani největší ani nejmenší hodnoty.

4 Cvičení

1. U následujících funkcí zjistěte body lokálních extrémů.

   a) $z = x^3y^2(6 - x - y)$,
   b) $z = x^3 + y^3 + 9xy + 27$,
   c) $z = xe^{y+x\sin x}$,
   d) $z = x^3 + y^3 - 3axy$,
   e) $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$,
   f) $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2)$,

2. Určete největší a nejmenší hodnoty daných funkcí na předepsaných množinách.

   a) $z = e^{xy}$ na množině $x + y = 1$,
   b) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ na množině $x + y = 2a$, $a > 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$,
   c) $z = xy$ na množině $x^2 + y^2 = 2a^2$,
   d) $u = xyz$ na množině $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$,
   e) $z = x - 2y - 3$ na množině $0 \leq x, y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$,
   f) $z = x^2 - 3y^2 - x + 18y - 4$ na množině $0 \leq x \leq y \leq 4$,
   g) $z = (x - y^2)(x-1)^{\frac{2}{3}}$ na množině $y^2 \leq x \leq 2$,
   h) $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ na množině $0 \leq x, y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$,
   ch) $z = x^2 - xy + y^2$ na množině $|x| + |y| \leq 1$,
   i) $z = x^2 - y^2$ na množině $x^2 + y^2 \leq 4$,
   j) $z = x^2 + 2xy + 4x + 8y$ na množině $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$,
   k) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ na množině $\langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$,
   l) $u = x + y + z$ na množině $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

3. V rovině $2x - z = 0$ nalezněte bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od bodů $(1, 1, 1)$ a $(2, 3, 4)$ co nejmenší.

4. Mějme n bodů v prostoru, $A_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n = (x_n, y_n, z_n)$. Určete takový bod $P = (x, y, z)$, pro nějž je součet druhých mocnin vzdáleností k jednotlivým $A_1, \ldots, A_n$ co nejmenší.

5. Nechť jsou dány $A = (4, 0, 4)$, $B = (4, 4, 4)$ a $C = (4, 4, 0)$. Na povrchu koule se středem v počátku a poloměrem 2 nalezněte bod D tak, aby objem čtyřstěnu $ABCD$ byl a) co největší, b) co nejmenší.

6. Jaké rozměry má mít kvádr daného objemu, aby měl minimální povrch? Co v případě maximálního povrchu?

7. Jakou největší hodnotu může mít součin tří nezáporných čísel, je-li jejich součet a? Zobecněte pro součin n činitelů.

8. Pomocí předchozího cvičení dokažte nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem
$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

9. Rozložte kladné číslo x na součet kladných sčítanců $x = x_1 + x_2 + x_3$ tak, aby hodnota výrazu $x_1^n x_2^m x_3^p$ byla maximální ($n, m, p \in \mathbb{N}$).

10. Dokažte nerovnost
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2},$$
kde $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. (Návod: určete minimum funkce $\frac{1}{2}(x^n + y^n)$ za podmínky $x + y = a$).

11. Rozložte dané číslo $x > 0$ na součin n kladných činitelů $x = x_1 \cdots x_n$ tak, aby součet jejich převrácených hodnot byl minimální.

12. V množině všech elips mající součet poloos roven $2L$ nalezněte elipsu s největším obsahem.

13. Určete trojúhelník daného obvodu $2p$, který při rotaci kolem jedné ze svých stran vytvoří těleso maximálního objemu.

14. Nechť K je rotační kužel výšky h a s poloměrem podstavy R. Jaké rozměry musí mít kvádr vepsaný do K, aby měl maximální objem?

15. Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $y = x - 2$.

16. Na elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $3x + y - 9 = 0$.

17. Jaká je největší vzdálenost plochy $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy = 6$ od roviny xy?

18. Na kružnici jsou dva body A a B. Najděte třetí bod C na téže kružnici tak, aby trojúhelník ABC měl největší obsah.

19. $*$ Planeta A obíhá po elipse $\dfrac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$. Její poloha v čase t je popsána
$$\begin{aligned} x &= 3 + 2\cos t \\ y &= -1 + \sin t. \end{aligned}$$
V čase $t = 0$ je vypuštěna sonda z bodu $(0,0)$ a pohybuje se rovnoměrně po přímce $2\sqrt{3}y - x = 0$ směrem do 1. kvadrantu. Určete, jaká musí být rychlost v sondy, aby se míjela s planetou A v co nejmenší vzdálenosti.

20. $*$ Cestovatel se ocitne bez zdroje vody. Podle mapy zjistil, že je v bodě $C = (0, 2\sqrt{5})$. Má dvě množnosti: řeka v nížině, jejíž tok je zakreslen křivkou $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, a horské jezero, které zabírá na mapě oblast $(x+2)^2 + y \leq \dfrac{1}{2} + 2\sqrt{5}$. Cestou dolů k řece se může pohybovat třikrát rychleji než cestou nahoru k jezeru. Kam se cestovatel vydá, aby došel k vodě co nejdříve?

Výsledky.

1. a) $(3,2)$ – max; b) $(-3,-3)$ – max; c) nemá extrém d) (a,a) – max pro $a<0$ a min pro $a>0$; e) $(0,0)$ – max; f) $(0,0)$ – min, pro $a>b$ je $(\pm1,0)$ – max, pro $a<b$ je $(0,\pm1)$ – max; **2.** a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ – max; b) (a,a) – min; c) $(\pm a,\pm a)$ – max, $(\pm a,\mp a)$ – min; d) max: $(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)$, min: $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}),(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}),(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$; e) $(0,1)$–min, $(1,0)$–max; f) $(4,4)$ – max, $(0,0)$ – min; g) $(2,0)$ – max, min: oblouk paraboly $y^2=x$ pro $x\in\langle 0,2\rangle$; h) $(\frac{7}{8},\frac{1}{8})$ – max, $(0,1)$ – min; ch) $(0,0)$ – min, $(\pm1,0),(0,\pm1)$ – max; i) $(0,\pm2)$ – min, $(\pm2,0)$–max; j) $(0,0)$–min, $(1,2)$–max; k) $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$–max, $(0,0)$–min; l) $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$–min, $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ – max; **3.** $(\frac{9}{10},2,\frac{9}{5})$; **4.** $P=\frac{1}{n}(\sum x_i,\sum y_i,\sum z_i)$; **5.** a) $(-2,0,0)$, b) $(2,0,0)$; **6.** čtverec, maximum neexistuje; **7.** $(a/3)^3$, $(a/n)^n$; **9.** $x_1=\frac{mx}{m+n+p}$, $x_2=\frac{nx}{m+n+p}$, $x_3=\frac{px}{m+n+p}$; **11.** $x_i=x^{\frac{1}{n}}$; **12.** kruh s poloměrem L; **13.** $a=b=\frac{3}{4}p$, $c=\frac{1}{2}p$; **14.** výška kvádru je $h/3$; **15.** $\frac{7}{4\sqrt{2}}$; **16.** $(\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}})$; **17.** $\sqrt{3}$; **18.** C leží na ose úsečky AB; **19.** $v=\frac{27\sqrt{3}-6}{4\pi\sqrt{13}}$; **20.** vzdálenost k jezeru je $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ a k řece $\sqrt{11}$ – vydá se k řece.

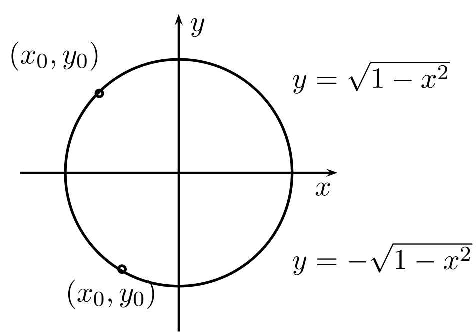
Kapitola 8

Funkce zadané implicitně

Začneme několika příklady. Prvním je známá rovnice pro jednotkovou kružnici

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Tato rovnice popisuje křivku, kterou si však nelze představit jako *graf* funkce $y = y(x)$. Nicméně kolem každého bodu (x_0, y_0), $y_0 > 0$ na této kružnici lze najít alespoň jistý úsek, který už *je* grafem funkce. A co víc, grafem diferencovatelné funkce.



Obr. 8.1

V tomto jednoduchém případě lze příslušnou funkci explicitně vyjádřit, obr. 8.1. Pro $y_0 > 0$ to je $y = \sqrt{1 - x^2}$ a pro $y_0 < 0$ pak $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Uvažujme nyní rovnici

$$\sin xy - x + y = 0. \tag{8.1}$$

Určitě existují body, které této rovnici vyhovují, např. bod $(0, 0)$. Ale v tomto případě už nelze z rovnice přímo vyjádřit y jako výše. I kdybychom již odněkud věděli, že křivka definovaná rovností (8.1) je v okolí bodu $(0, 0)$ popsatelná jistou funkcí $y = y(x)$, tak její explicitní tvar nezjistíme. Přesto bychom mohli chtít znát tečnu k této křivce v bodě $(0, 0)$. Způsob, jak to provést je obsahem této kapitoly.

Obecně vyšetřujeme rovnice typu $f(x,y)=0$. Intuitivně předpokládáme, že tato rovnice zadává křivku. Následujících několik příkladů ukazuje, že tato představa může být někdy chybná.

Příklad 8.1. (i) Rovnice $(x+1)^2+(y-2)^2=0$ zadává pouze jediný bod $(-1,2)$.
(ii) Rovnice $x^2+y^2+1=0$ je jiné zadání prázdné množiny, neboť žádný bod v $\mathbb{R}^2$ ji nevyhovuje.
(iii) Nechť $f(x,y)=|xy|-xy$. Je-li součin $xy\geq 0$, je rovnice $f(x,y)=0$ splněna. Je-li $xy<0$, tak nikoliv. Rovnost $f(x,y)=0$ zadává množinu skládající se z 1. a 3. kvadrantu.

1 Věta o implicitní funkci

Následující věta přináší kritérium, jak poznat, zda rovnice $f(x,y)=0$ definuje v okolí jistého bodu funkci $y=y(x)$. Tomuto způsobu zadání funkce $y(x)$ se říká *implicitní*.

Věta 8.2. *Nechť $G\subset\mathbb{R}^2$ je otevřená množina a nechť $f\colon G\longrightarrow\mathbb{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li bod $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)\in G$ takový, že $f(\boldsymbol{x}_0)=0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$, pak existuje okolí $I\subset\mathbb{R}$ bodu x_0 a funkce $y\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ třídy C^1, že*

$$y(x_0)=y_0,\quad a\quad f(x,y(x))=0$$

pro všechna $x\in I$. Pro derivaci $y'(x)$ navíc platí

$$y'(x)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Důkaz. Je-li $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$, pak buď je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)>0$ nebo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)<0$. Budeme uvažovat první možnost. Druhá se totiž řeší zcela analogicky.

Protože f je třídy C^1, tak $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá funkce na G. Existuje tedy okolí Q bodu $\boldsymbol{x}_0$, na kterém je $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nejenom stále kladná, ale dokonce platí

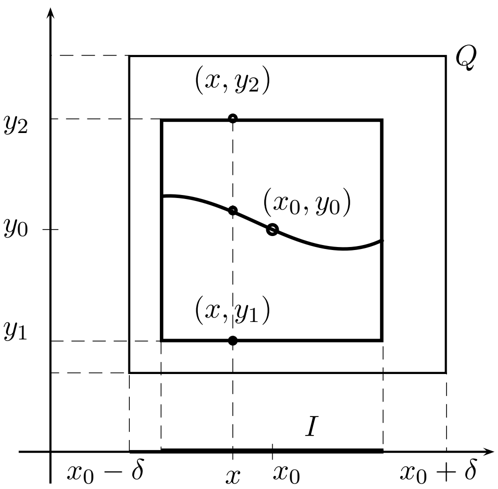
$$\frac{\partial f}{\partial y}\geq\varepsilon \tag{8.2}$$

pro jisté malé $\varepsilon>0$. Toto okolí Q si můžeme představit např. jako otevřený čtverec

$$Q=(x_0-\delta,x_0+\delta_0)\times(y_0-\delta,y_0+\delta)$$

pro nějaké $\delta>0$, viz obr. 8.2. Funkce $f(x_0,y)$ je v proměnné y rostoucí, neboť její derivace je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)>0$. Protože $f(x_0,y_0)=0$, existují čísla $y_1\in(y_0-\delta,y_0)$ a $y_2\in(y_0,y_0+\delta)$, že $f(x_0,y_1)<0$ a $f(x_0,y_2)>0$. Ze spojitosti plyne, že

$$f(x,y_1)<0\quad\text{a}\quad f(x,y_2)>0 \tag{8.3}$$



Obr. 8.2

i pro další body $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, kde $0 < \delta_1 \leq \delta$. Mějme nyní takové pevně zvolené $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Funkce $f(x, y)$ proměnné y roste na intervalu (y_1, y_2) a přitom podle (8.3) má na obou koncích opačné znaménko. Existuje tak právě jedno $y \in (y_1, y_2)$, pro něž je hodnota $f(x, y) = 0$. Označíme toto y ležící nad zvoleným bodem x jako $y(x)$. Tím jsme získali funkci y definovanou na intervalu $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, která vyhovuje podmínce

$$f(x, y(x)) = 0.$$

Zbývá ukázat, že y je také třídy C^1 na I, tj. derivace y' je spojitá. Mějme $x \in I$ a $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že i bod $x + h$ leží v I. Označíme si

$$\omega(h) = y(x + h) - y(x), \text{ tj. } y(x + h) = y(x) + \omega(h).$$

Použijeme nyní Větu 5.7 o střední hodnotě pro přírůstek funkce f mezi body (x, y) a $(x, y) + (h, \omega(h))$. Existuje číslo $\vartheta \in (0, 1)$, že

$$\begin{aligned} f(x + h, y(x) + \omega(h)) - f(x, y(x)) &= \big(h, \omega(h)\big) \cdot \operatorname{grad} f(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)) \\ &= h \, \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big) + \omega(h) \, \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big). \end{aligned}$$

Protože hodnoty funkce ve zvolených bodech (x, y) a $(x + h, y + \omega(h))$ jsou nulové, dostáváme

$$h \, \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big) + \omega(h) \, \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big) = 0.$$

Podle (8.2) je $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, můžeme z poslední rovnice vyjádřit $\omega(h)$.

$$\omega(h) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta h, y(x) + \vartheta\omega(h)\Big)}\, h. \tag{8.4}$$

Pomocí (8.2) lze dále vyvodit

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} |\omega(h)| &= \lim_{h\to 0} \left| \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2\omega(h)\Big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2\omega(h)\Big)}\, h \right| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon} \lim_{h\to 0} \left| \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2\omega(h)\Big) \right| |h| = 0.\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že funkce $y(x)$ je spojitá na I, neboť z definice $\omega(h)$ plyne

$$\lim_{h\to 0} y(x+h) - y(x) = \lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Vydělíme nyní rovnici (8.4) číslem h a provedeme limitu $h \to 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2\omega(h))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x + \vartheta_1 h, y(x) + \vartheta_2\omega(h))} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}.\end{aligned}$$

Z této poslední rovnosti jsme zjistili, že jednak derivace y' existuje, dále vidíme, čemu se rovná. Protože $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité, je y třídy C^1 na I. □

Příklad 8.3. Podíváme se na případ ze začátku kapitoly, který zůstal otevřený. Máme rovnici

$$\sin xy - x + y = 0.$$

Zjistíme, zda v okolí bodu $(0,0)$ zadává tato rovnice implicitně funkci $y = y(x)$. Podle Věty 8.2 k tomu stačí ověřit, zda funkce $f(x,y) = \sin xy - x + y$ splňuje podmínku $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x\cos xy + 1\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 1.$$

Protože funkce f je třídy C^1, je rovněž $y(x)$ diferencovatelná a platí

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{-1}{1} = 1.$$

Funkce $y(x)$ zadaná implicitně rovnicí (8.1) má v nule drivaci rovnou 1.

Pro zapamatování vzorce pro $y'(x)$ z Věty 8.2 je výhodná následující úvaha. Kdybychom odněkud už věděli, implicitní funkce $y(x)$ existuje a je diferencovatelná, tak hodnotu její derivace spočteme takto. Rovnici

$$f(x, y(x)) = 0$$

zderivujeme podle x podle vzorce pro derivaci složené funkce:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y'.$$

Je-li $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, dostáváme z této rovnice ihned tvar y'. Můžeme si všimnout i další věci. Kdyby $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, tak lze naopak vyjádřit x pomocí y, $x = x(y)$. Obecně je možné vyjádřit jednu proměnnou jako funkci té druhé, jestliže alespoň jedna z parciálních derivací je nenulová. Jsou-li obě parciální derivace nulové, pak nelze bez dalšího zkoumání říci nic.

Pro funkci f tří (a více) proměnných je jak tvrzení věty o implicitní funkci, tak i důkaz podobný. Uvedeme si proto pouze znění příslušné věty v $\mathbb{R}^3$.

Věta 8.4. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a nechť $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na G. Je-li bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ takový, že $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ a $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, pak existuje okolí $J \subset \mathbb{R}^2$ bodu (x_0, y_0) a funkce $z\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1, že*

$$z(x_0, y_0) = z_0, \quad a \quad f(x, y, z(x, y)) = 0$$

pro všechna $(x, y) \in J$. Pro derivace platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Jako ilustraci uvedeme následující příklad.

Příklad 8.5. Zjistěte, zda rovnice $3x - 2y + z^2 - \ln z = 0$ zadává implicitní funkci $z(x, y)$ v okolí bodu $(1, 1, 1)$. V kladném případě určete její gradient.

Ověříme předpoklady Věty 8.4.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 2z - \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = 1.$$

Teď víme, že funkce $z(x, y)$ existuje a je třídy C^1. Takže

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\right).$$

V bodě $(1, 1)$ pak dostaneme

$$\operatorname{grad} z(1, 1) = (-3, 2).$$

2 Cvičení

Úloha: Vypočtěte první a druhou derivaci implicitní funkce dané rovnicí

$$xe^y + ye^x - 2 = 0. \tag{8.5}$$

v bodě $x = 0$.

Řešení: Nejprve musíme zjistit hodnotu $y(0)$. Dosadíme $x = 0$ do rovnice (8.5):

$$0e^y + ye^0 - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 2.$$

Ověříme, že pro $f(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ je $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 2) \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) = xe^y + e^x \Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = 1.$$

Rovnicí (8.5) je tak zadána C^1 funkce na okolí bodu $x = 0$. Její derivaci získáme, že zderivujeme rovnici (8.5) podle x. První derivace dává

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^y + ye^x - 2) = e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x. \tag{8.6}$$

Odtud

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}. \tag{8.7}$$

(Ten samý vztah bychom dostali ze vzorce ve Větě 8.2.) Pro $x = 0$ máme $y'(0) = -e^2 - 2$. Protože y je C^1 na okolí nuly, pravá strana (8.7) je diferencovatelná funkce, tj. existuje i y'' na okolí nuly. Můžeme derivovat rovnici (8.6) ještě jednou,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x) = 2y'e^y + xy''e^y + xy'^2e^y + y''e^x + 2y'e^x + ye^x. \tag{8.8}$$

Nyní všechny hodnoty $x = 0$, $y = 2$ a $y' = -e^2 - 2$ dosadíme do (8.8).

$$0 = -2(e^2 + 2) + y'' - 2(e^2 + 2) + 2.$$

Odtud $y'' = 2e^2(e^2 + 2) + 2(e^2 + 2) - 2 = 2e^4 + 6e^2 + 2$.

Závěr: funkce y má hodnoty derivací $y'(0) = -e^2 - 2$ a $y''(0) = 2e^4 + 6e^2 + 2$.

1. Zjistěte derivace $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ funkcí zadaných implicitně.

   a) $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$ v bodě $(1, ?)$,

   b) $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$ v bodě $(?, 0)$,

   c) $\ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ v bodě $(\pm 2, 0)$,

d) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ v obecném bodě,
e) $e^x \cos y + e^y \cos x = 1$ v obecném bodě,
f) $xe^x = y^2 + xy$ v obecném bodě.

2. Vypočtěte y' (a eventuelně y'') pro funkci zadanou rovnicí

$$x^y = y^x.$$

3. Vypočtěte derivace $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ v obecném bodě pro implicitně zadané funkce.

a) $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$,
b) $z = xy \sin zx$,
c) $z + e^z = xy + 1$,
d) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = 5$.

4. Ověřte, že funkce $z(x, y)$ daná rovnicí

$$g\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

splňuje

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

5. Nechť $f(x, y, z)$ je třídy C^1 a platí, že $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Čemu se rovná $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}$?

6. Nechť rovnice $f(x, y) = 0$ zadává funkci $y(x)$, která má druhou derivaci. Ukažte, že

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

7. Vypočtěte všechny první a druhé parciální derivace funkce $z(x, y)$ zadané

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

8. Nechť funkce $z(x, y)$ je implicitně zadána rovnicí $f(x, y, z) = 0$. Nechť funkce $u(x, y)$ je zadána rovnicí $g(x, y, z, u) = 0$ Vypočtěte Du.

9. Nechť $z = z(x, y)$. Zavedeme novou funkci $w = w(u, v)$ tak, že platí

$$\begin{aligned} x + y &= u, \\ \frac{y}{x} &= v, \\ \frac{z}{x} &= w. \end{aligned}$$

Pomocí implicitního derivování ukažte, že rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

se transformuje na tvar

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

Výsledky.

1. a) $-1/2 + (\ln\sqrt{8})/16$, b) $1/(\ln 8 - 16)$, c) 1, d) $y' = -y/x$, e) $\dfrac{e^y \sin x - e^x \cos y}{e^y \cos x - e^x \sin y}$, f) $\dfrac{e^x + xe^x - y}{2y + x}$; **2.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{1 - \ln x}{1 - \ln y}$; **3.** a) $\dfrac{y \cos xy + z \cos xz}{x \cos xz + y \cos yz}$, $-\dfrac{x \cos xy + z \cos yz}{x \cos xz + y \cos yz}$, b) $\dfrac{y \sin zx + xyz \cos zx}{1 - x^2 y \cos zx}$, c) $y/(e^z + 1)$, $x/(e^z + 1)$, d) $-\dfrac{1 + z^2}{1 + x^2}$, $-\dfrac{1 + z^2}{1 + y^2}$; **5.** -1; **7.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{z^2 - xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\dfrac{xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2z\dfrac{z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2}{(z^2 - xy)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\dfrac{x^3 yz}{(z^2 - xy)^3}$; **8.** $Du = \left(\dfrac{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}} - \dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\right) Dx + \left(\dfrac{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}} - \dfrac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial u}}\right) Dy.$

Literatura

[1] J. Hamhalter, J. Tišer *Integrální počet funkcí více proměnných*, skripta FEL ČVUT

[2] J. Klíma *Smrt má ráda poezii*, edice Spirála, Československý spisovatel, Praha, 1968

[3] V. Jarník *Diferenciální počet II*, Academia, Praha 1976