Semestrální test (varianta X)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Mějme funkci
$$f(x,y) = e^{x-y^2}.$$
   (a) Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce f v bodě $(0,0)$.
   (b) Ať $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je funkce třídy C^1, pro kterou platí $\boldsymbol{\varphi}(0) = (1,1)$ a $\boldsymbol{\varphi}'(0) = (2,3)$. Pomocí řetízkového pravidla nalezněte $g'(0)$, jestliže $g(t) = f(\boldsymbol{\varphi}(t))$.

2. [5 bodů] Jsou dány tři krychle K_i, $i \in \{1,2,3\}$. Délka hrany krychle K_i je x_i. Pomocí Lagrangeových multiplikátorů najděte x_1, x_2, x_3 tak, aby součet objemů těchto krychlí byl maximální a platilo $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1$.

3. [5 bodů] Vypočtěte integrál
$$\int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-2-x} \frac{x+y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
pomocí jeho vyjádření v polárních souřadnicích se středem v počátku tak, aby vnitřní integrace byla přes proměnou r.

4. [5 bodů] Je dána mocninná řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2-9}{4^k} (x-1)^{2k}.$$
   (a) Nalezněte její poloměr konvergence a rozhodněte, zda řada konverguje v bodě $x = 3$.
   (b) Určete koeficient u $(x-1)^7$ v rozvoji funkce $f'(x)$ do mocninné řady na nějakém okolí bodu 1, kde $f(x)$ je součet zadané řady.

Semestrální test (varianta Y)

Jméno a příjmení: ....

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Je dána funkce
$$f(x,y) = \frac{\ln(xy)}{\sqrt{y-x}}.$$
   (a) Nalezněte definiční obor funkce f.
   (b) Nalezněte hladinu funkce f výšky 0 a načrtněte ji.

2. [5 bodů] Je dána funkce
$$f(x,y) = x^2y + x^2 + y^2 - 3y.$$
   (a) Nalezněte a klasifikujte všechny stacionární body funkce f.
   (b) Určete jednotkový směr největšího růstu funkce f v bodě $(2,3)$.

3. [5 bodů] Záměnou pořadí integrace vypočtěte integrál
$$\int_0^1 \int_{-1-\sqrt{1-y}}^{-y} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

4. [5 bodů] Nalezněte rozvoj funkce
$$f(x) = \frac{3}{x-1}$$
do mocninné řady se středem v bodě -1 a určete jeho poloměr konvergence.