Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno a příjmení: ..... Podpis: .....

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku Jméno a příjmení a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r.
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r.
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2\sin\theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Plechovka ve tvaru válce má mít objem $54\pi\,\mathrm{cm}^3$. Dno a víko jsou z materiálu, jehož cena je $0,25\,\mathrm{Kč/cm}^2$. Materiál na výrobu pláště stojí $0,5\,\mathrm{Kč/cm}^2$. Nalezněte rozměry plechovky tak, aby cena byla minimální.

2. [10 bodů] Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^2, \alpha xy + zy, \beta y^2)$$

   (a) Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β tak, aby vektorové pole $\boldsymbol{F}$ bylo potenciálové.

   (b) Pro hodnoty α, β z bodu (a) nalezněte potenciál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ a vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes křivku C, jejíž parametrizace je $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))$, $t \in [-1, 2]$.

3. [10 bodů] Záměnou pořadí integrace vypočtěte

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

4. [10 bodů] Mějme množinu $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 4\}$

   (a) Nalezněte obsah plochy, která vznikne průnikem množiny T s rovinou o rovnici $z = x + 2$.

   (b) Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok vektorového pole

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + e^z, \sin(xz), 2z - x)$$

   hranicí množiny T, která je orientovaná vnějším normálovým polem.

5. [10 bodů] Nechť

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2(x + 1)}.$$

   (a) Nalezněte rozvoj funkce f do mocninné řady se středem v bodě 1 a určete parametry intervalu konvergence.

   (b) Určete koeficienty u $(x - 1)^2$ a $(x - 1)^3$ v rozvoji funkce $g(x) = (x - 1)f'(x)$ do mocninné řady se středem v bodě 1.