Matematická analýza 2

Úvod

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Základní informace

Stránky předmětu:
https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01MA2

Obsah kurzu:

1. Diferenciální počet
2. Řady funkcí
3. Integrální počet

Euklidovský prostor

Ať $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R} \text{ pro každé } i = 1, \dots, n\}.$$

Pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

- (O1) sčítání: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;
- (O2) násobení číslem: $\alpha \boldsymbol{x} := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$;
- (O3) skalární součin: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Definice (n-dimenzionální euklidovský prostor)

Množina $\mathbb{R}^n$ vybavená operacemi (O1)–(O3) se nazývá (n-dimenzionální) euklidovský prostor.

Euklidovský prostor

Terminologie a značení:

- Místo $\mathbb{R}^1$ budeme psát $\mathbb{R}$.
- Prvky euklidovského prostoru nazýváme body nebo také vektory.
- Reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme složky (případně souřadnice či komponenty) vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- Mezi řádkovým a sloupcovým zápisem vektorů v $\mathbb{R}^n$ nebudeme dělat rozdíl. Sloupcový však budeme využívat jen při zápisech s maticovým násobením.

Definice (euklidovská norma)

Euklidovská norma (krátce velikost) vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je číslo

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Vlastnosti euklidovské normy

- V $\mathbb{R}$ je $\|x\| = |x|$.

Tvrzení (základní vlastnosti)

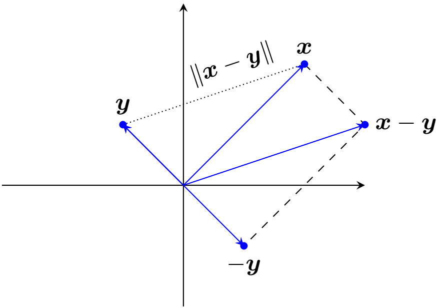
Pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *a navíc* $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *právě tehdy, když* $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$;
3. $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$; *(Cauchyho-Schwarzova nerovnost)*
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$; *(Trojúhelníková nerovnost)*

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost mezi body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.



Vlastosti vzdálenosti dvou bodů:

1. $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq 0$ a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = 0$ právě tehdy, když $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
2. $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$;
3. $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$.

Úhel mezi vektory

Úhel mezi nenulovými vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}.$$

- Díky Cauchyho-Schwarzově nerovnosti je úhel dobře definovaný.
- Pomocí skalárního součinu má smysl definovat kolmost dvou vektorů i v případě, kdy některý z vektorů je nulový.

Definice (kolmost vektorů)

Řekneme, že dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou na sebe kolmé (píšeme $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), jestliže $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

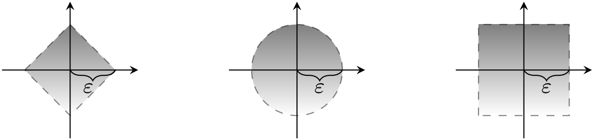
- $\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2$ právě tehdy, když $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Příklad

Ať $\boldsymbol{x} = (3, 4)$ a $\boldsymbol{y} = (-1, 7)$. Potom $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = 5$. Úhel mezi vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dále $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{v} = t(-4, 3)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Další normy na $\mathbb{R}^n$

- Součtová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
- maximová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.
- Není těžké ukázat, že se jedná o normy na lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$.



$\|\boldsymbol{x}\|_1 < \varepsilon$ $\qquad$ $\|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon$ $\qquad$ $\|x\|_\infty < \varepsilon$

Tvrzení (nerovnosti mezi normami)

Pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *platí*

1. $|x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ *pro každé* $i = 1, \dots, n$;
2. $\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{x}\|$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a její limita

- Posloupnost (bodů) v $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ... $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $\boldsymbol{x}_k \in M$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.
- Pro všechny posloupnosti $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, $(\boldsymbol{y}_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty} + (\boldsymbol{y}_k)_{k=1}^{+\infty} &:= (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k)_{k=1}^{+\infty}\,, \\
\alpha\,(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty} &:= (\alpha \boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}\,.
\end{aligned}
$$

Definice (limita posloupnosti)

Nechť $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je limita posloupnosti $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ (případně $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k $\boldsymbol{x}$) a píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$ (nebo $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$ pro $k \to +\infty$), jestliže

$$
\lim_{k\to+\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0.
$$

Limita posloupnosti

Terminologie:

- $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ je konvergentní posloupnost ... $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k nějakému $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ je divergentní posloupnost ... $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ není konvergentní.

Tvrzení (jednoznačnost limity posloupnosti)

Každá posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Tvrzení (konvergence posloupnosti po složkách)

Nechť $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ a $\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{L}$ právě tehdy, když $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{kj} = L_j$ pro každé $j = 1, \dots, n$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Limita posloupnosti

Příklad

1. Posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $\boldsymbol{x}_k = \big(1, (-1)^k\big)$, je divergentní.
2. Posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{2k+1}{1-k}, \sqrt[k]{k}\right)$, je konvergentní a $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = (-2, 1)$.

Tvrzení (základní pravidla o limitách posloupností)

Je-li $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$, *potom*

1. $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha \boldsymbol{x}_k = \alpha \boldsymbol{x}$;
2. $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;
3. $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Omezené posloupnosti

Definice (omezená posloupnost)

Posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ se nazve omezená, jestliže existuje $R > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{x}_k\| \leq R$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Příklad

1. Posloupnost $((1,k))_{k=1}^{+\infty}$ není omezená.
2. Posloupnost $\left(\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)\right)_{k=1}^{+\infty}$ je omezená.

- Každá konvergentní posloupnost je nutně omezená.
- Ne každá omezená posloupnost je konvergentní (viz příklad výše).
- Všimněme si, že z posloupnosti $\left(\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)\right)_{k=1}^{+\infty}$ můžeme vynecháním vhodných členů vytvořit konvergentní posloupnost. Je to náhoda?

Podposloupnosti

Definice (podposloupnost)

Podposloupnost posloupnosti $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ je posloupnost $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{+\infty}$, kde $(k_l)_{l=1}^{+\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Místo $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{+\infty}$ budeme také psát $\big(\boldsymbol{x}_{k(l)}\big)_{l=1}^{+\infty}$.

Příklad

Podposloupnosti posloupnosti $\big(\big(\frac{1}{k}, (-1)^k\big)\big)_{k=1}^{+\infty}$ jsou například

1. $\left(\left(\frac{1}{l+1}, (-1)^{l+1}\right)\right)_{l=1}^{+\infty}$;
2. $\big(\big(\frac{1}{2l}, 1\big)\big)_{l=1}^{+\infty}$;
3. $\left(\left(\frac{1}{2l+1}, -1\right)\right)_{l=1}^{+\infty}$.

Bolzanova-Weierstrassova věta

Tvrzení (konvergence podposloupností)

Konverguje-li posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v $\mathbb{R}^n$ k $\boldsymbol{x}$, pak k bodu $\boldsymbol{x}$ konverguje také každá její podposloupnost.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Bolzanova-Weierstrassova věta)

Každá omezená posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Předpoklad omezenosti v Bolzanově-Weierstrassově věta je podstatný. Například číselná posloupnost $(k)_{k=1}^{+\infty}$ nemá konvergentní podposloupnost.

Okolí bodu

Definice (okolí a prstencové okolí bodu)

Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$U(\boldsymbol{x};\varepsilon) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}$$

nazýváme okolí bodu $\boldsymbol{x}$ o poloměru ε. Množinu

$$P(\boldsymbol{x};\varepsilon) := U(\boldsymbol{x};\varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}$$

nazýváme prstencové okolí bodu $\boldsymbol{x}$ o poloměru ε.

- Nebude-li nutné specifikovat poloměr ε okolí a prstencového okolí, budeme stručněji psát $U(\boldsymbol{x})$ a $P(\boldsymbol{x})$.

Vnitřek, hranice a uzávěr množiny

Definice (vnitřek, hranice a uzávěr množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je

1. vnitřní bod množiny M, jestliže existuje $U(\boldsymbol{x})$ tak, že $U(\boldsymbol{x}) \subseteq M$;
2. hraniční bod množiny M, jestliže pro každé $U(\boldsymbol{x})$ platí $U(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset$ a současně $U(\boldsymbol{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Vnitřek $\operatorname{int}(M)$ množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M.
Hranice ∂M množiny M je množina všech hraničních bodů množiny M.
Uzávěr $\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.

Vnitřek, hranice a uzávěr množiny

Příklad

Ať $M = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(M) &= (0,1), \\ \partial M &= \{0,1\}, \\ \overline{M} &= [0,1]. \end{aligned}$$

Příklad

Ať $M = [0,1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(M) &= \emptyset, \\ \partial M = \overline{M} &= [0,1] \times \{0\}. \end{aligned}$$

Otevřené a uzavřené množiny

Definice (otevřená a uzavřená množina)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že množina M je otevřená, jestliže $M = \operatorname{int}(M)$. Množina M se nazve uzavřená, jestliže $M = \overline{M}$.

Příklad

1. Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou množiny otevřené a současně uzavřené v $\mathbb{R}^n$.
2. Interval $[0, 1)$ není otevřená ani uzavřená množina.
3. Každé okolí bodu v $\mathbb{R}^n$ je otevřená množina .
4. Množina
$$B(\boldsymbol{x}; r) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq r\},$$
která se nazývá n-dimenzionální koule se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem r, je uzavřená.

Otevřené a uzavřené množiny

Tvrzení (charakterizace uzavřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. M *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^n \setminus M$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^n$.
3. *Každá konvergentní posloupnost bodů v* M *má limitu ležící v* M.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Lze ukázat, že:

- Libovolné sjednocení a konečný průnik otevřených množin jsou otevřené množiny.
- Konečné sjednocení a libovolný průnik uzavřených množin jsou uzavřené množiny.
- $\overline{M}$ je průnik všech uzavřených množin obsahujících M.
- $\operatorname{int}(M)$ je sjednocení všech otevřených podmnožin množiny M.

Hromadné a izolované body

Definice (hromadný a izolovaný bod)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je

1. hromadný bod množiny M, jestliže pro každé $P(\boldsymbol{x})$ je $P(\boldsymbol{x}) \cap M \neq \emptyset$;
2. izolovaný bod množiny M, jestliže existuje $U(\boldsymbol{x})$ tak, že $U(\boldsymbol{x}) \cap M = \{\boldsymbol{x}\}$.

Příklad

1. Konečná množina nemá hromadné body, má jen izolované.
2. Každý vnitřní bod množiny je jejím hromadným bodem.
3. Množina $\left\{ \frac{1}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ má jediný hromadný bod, a to 0.
4. Ať $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \right\}$. Hromadné body množiny M jsou body na jednotkové kružnici se středem v počátku. Množina M má jediný izolovaný bod, a to počátek.

Hromadné a izolované body

Tvrzení (charakterizace hromadných bodů)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. *Bod* $\boldsymbol{x}$ *je hromadný bod množiny* M *právě tehdy, když existuje posloupnost* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ *bodů v* $M \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ *konvergující k* $\boldsymbol{x}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Jediné hromadné body množiny $M = \left\{ \left(\sqrt[k]{k}, \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ jsou $(1,-1)$, $(1,0)$ a $(1,1)$.

Omezené množiny a hromadné body

- Hromadný bod může existovat, jen když je množina nekonečná.
- Ne každá nekonečná množina však má hromadný bod.

Definice (omezená množina)

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve omezená, jestliže existuje reálné číslo $R > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{x}\| \leq R$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$.

Tvrzení (existence hromadného bodů)

Každá nekonečná omezená množina má hromadný bod.

Důkaz: Viz přednáška. ■