# Matematická analýza 2

## Limita a spojitost

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

# Limita funkce

**Definice (limita vektorové funkce)**

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množiny $M \subseteq D$ a $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce. Řekneme, že $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$ je *limita* $\boldsymbol{f}$ *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *vzhledem k* $M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a}; \delta) \cap M$ je $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}\| < \varepsilon$. Pokud $\boldsymbol{L}$ je limita $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ vzhledem k $M$, pak píšeme

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}.$$

### Úmluva

Místo

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$$

budeme pro jednoduchost často psát jen

1. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$, jestliže $M = D$;
2. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ V(\boldsymbol{x})}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$, jestliže $M = \{\boldsymbol{x} \in D \,|\, V(\boldsymbol{x})\}$, kde $V(\boldsymbol{x})$ je nějaká výroková forma.

# Základní příklady

**Příklad**

Ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}.$$

**Příklad**

Ať $i \in \{1, \dots, n\}$. Reálná funkce $\sigma_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se nazývá $i$-tá souřadnicová projekce. Pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \sigma_i(\boldsymbol{x}) = \sigma_i(\boldsymbol{a}) = a_i.$$

**Příklad**

Pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{a}\|.$$

# Limity vzhledem k podmnožinám

### Tvrzení

*Nechť* $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je vektorová funkce,* $\boldsymbol{a}$ *je hromadný bod množiny* $M \subseteq D$ *a* $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$*. Potom je ekvivalentní:*

1. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$.
2. *Pro každou množinu* $N \subseteq M$ *takovou, že* $\boldsymbol{a}$ *je její hromadný bod, platí* $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in N}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

### Příklad

Limita

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

neexistuje.

# Heineho věta a její důsledky

## Věta (Heineho věta)

*Nechť* $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$*, kde* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, je vektorová funkce,* $\boldsymbol{a}$ *je hromadný bod množiny* $M \subseteq D$ *a* $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^m$*. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\in M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$.
2. *Pro každou posloupnost* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ *bodů v* $M \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ *konvergující k* $\boldsymbol{a}$ *platí* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \to \boldsymbol{L}$ *pro* $k \to +\infty$.

Důkaz: Vynecháváme (analogické jako v jedné proměnné). ■

## Příklad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\, y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

# Heineho věta a její důsledky

**Tvrzení (jednoznačnost limity vektorové funkce)**

*Existuje-li limita vektorové funkce $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k $M \subseteq D$, pak je určena jednoznačně.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Tvrzení (konvergence vektorové funkce po složkách)**

*Nechť $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce a $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod množiny $M \subseteq D$. Jestliže $f_1, \ldots, f_m$ jsou složky vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{L} = (L_1, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$, potom je ekvivalentní:*

1. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in M}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$.
2. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \in M}} f_i(\boldsymbol{x}) = L_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, m$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Heineho věta a její důsledky

**Příklad**

$$\lim_{(x,y)\to(-3,4)} \left(\|(x,y)\|, x\right) = (5,-3)\,.$$

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = A$ a $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} g(\boldsymbol{x}) = B$. Pak

1. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} \alpha f(\boldsymbol{x}) = \alpha A$;
2. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) = A + B$;
3. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = AB$;
4. je-li $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ a $B \neq 0$, potom $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{A}{B}$;
5. existuje-li $\delta > 0$ tak, že $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M \cap P(\boldsymbol{a};\delta)$, potom $A \leq B$;
6. je-li $f(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ na $M$ a $A = B$, potom $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} h(\boldsymbol{x}) = A$.

# Příklady

**Příklad**

1. $$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2} = 2.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cos \frac{1}{y}}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

# Limita složené funkce

**Věta (Limita složené funkce)**

*Nechť* $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *a* $\boldsymbol{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Předpokládejme dále, že platí*

1. $\boldsymbol{a}$ *je hromadný bod množiny* $M \subseteq D$*;*
2. $\boldsymbol{b}$ *je hromadný bod množiny* $N \subseteq E$ *a* $\boldsymbol{g}(M) \subseteq N$*;*
3. $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{y}\in N}} f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{b})$ *a* $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$*;*

*Potom* $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{b})$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

**Příklad**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1.$$

# Spojitost

### Definice (spojitá funkce)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{a} \in D$.

1. Řekneme, že vektorová funkce $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže platí jedna z následujících podmínek:
   (i) $\boldsymbol{a}$ je izolovaný bod množiny $D$;
   (ii) $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.
2. Funkce $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ se nazve spojitá na $M \subseteq D$, jestliže $\boldsymbol{f}$ je spojitá v každém bodě $M$. Je-li $\boldsymbol{f}$ spojitá na svém definičním oboru $D$, pak krátce říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá.
3. Množinu všech spojitých vektorových funkcí $\boldsymbol{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ značíme symbolem $C(M; \mathbb{R}^m)$. Je-li $m = 1$, pak místo $C(M; \mathbb{R})$ píšeme jen $C(M)$.

# Jednoduché příklady spojitých funkcí

**Příklad**

Ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$. Funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, je spojitá.

**Příklad**

Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\sigma_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $i$- tá souřadnicová projekce (tj. $\sigma_i(\boldsymbol{x}) = x_i$). Potom $\sigma_i$ je spojitá.

**Příklad**

Ať $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom $f$ je spojitá.

# Spojitost pomocí posloupností

**Věta (Charakterizace spojitosti v bodě)**

*Nechť* $\boldsymbol{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ *a* $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Potom je ekvivalentní*

1. $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v* $\boldsymbol{a}$.
2. *Pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro každé* $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; \delta) \cap D$ *platí* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}); \varepsilon)$.
3. *Pro každou posloupnost* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ *bodů v* $D$ *splňující* $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ *pro* $k \to +\infty$ *platí* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ *pro* $k \to +\infty$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Spojitost složek

**Tvrzení (spojitost složek vektorové funkce)**

*Ať $\boldsymbol{a} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce se složkami $f_1, \ldots, f_m$. Potom $\boldsymbol{f}$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ je $f_i$ spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Příklad**

Vektorová funkce

$$\boldsymbol{\Phi}(t, x, y, z) = (t, x - vt, y, z)\,,$$

kde $v \in [0, \infty)$, je spojitá vektorová funkce.

# Spojitost a aritmetické operace

## Tvrzení (spojitost a aritmetické operace)

*Nechť reálné funkce $f$ a $g$ jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Potom*

1. $f + g$ *je spojitá v* $\boldsymbol{a}$;
2. $fg$ *je spojitá v* $\boldsymbol{a}$;
3. *jestliže* $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, *potom* $\frac{f}{g}$ *je spojitá v* $\boldsymbol{a}$;

Důkaz: Viz přednáška. ∎

## Příklad

1. Každý polynom je spojitá funkce.
2. Každá racionální funkce je spojitá a její definiční obor je otevřená množina.

# Spojitost složené funkce

### Tvrzení (spojitost složené funkce)

*Nechť* $\boldsymbol{f} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *a* $\boldsymbol{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Jestliže vektorová funkce* $\boldsymbol{g}$ *je spojitá v bodě* $\boldsymbol{a}$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá v bodě* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$*, potom vektorová funkce* $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ *je spojitá v bodě* $\boldsymbol{a}$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

### Příklad

Vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{\frac{3}{2}}}$$

je spojité (na svém definičním oboru $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$).

# Zajímavost

**Věta (charakterizace spojitosti pomocí otevřených množin)**

*Pro každou vektorovou funkci* $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. $\boldsymbol{f}$ *je spojitá.*
2. *Pro každou otevřenou množinu* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *existuje otevřená množina* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *tak, že* $\boldsymbol{f}^{-1}(V) = \Omega \cap D$.

Důkaz: Vynecháváme. ■